Stanisław Wajler

ZAGADNIENIA EKSTREMALNE W PEWNYCH KLASACH FUNKCJI JEDNOLISTNYCH I PEWNYCH KLASACH FUNKCJI TYPOWO - RZECZYWISTYCH

Praca doktorska wykonana w Zakładzie Zastosowań Matematyki Wydziału Ekonomicznego Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Promotor:
Prof.dr hab. Zdzisław Lewandowski

Lublin 1977

Spis treści

str.

1. Wstęp 1

2. Rozdział I : Uogólnione równanie Löwnera dla pewnych klas funkcji jednolistnych 4

3. Rozdział II : Zbiory pokrycia dla funkcji z unormowaniem Montela i majoryzacji funkcji .. 41

4. Rozdział III: Zagadnienia ekstremalne dla funkcji typowo-rzeczywistych 51

5. Bibliografia 70

W s t ę p

Celem rozważań pracy doktorskiej są problemy ekstremalne w pewnych klasach funkcji jednolistnych i pewnych klasach funkcji typowo-rzeczywistych w kole jednostkowym K_1.

Główny wynik rozdziału pierwszego zawarty jest w twierdzeniu 1.2, które podaje równanie typu Löwnera dla klasy funkcji prawie-wypukłych i pewnych jej podklas. W szczególności otrzymuje się równanie typu Löwnera dla funkcji gwiaździstych, wypukłych oraz dla funkcji ograniczonych np. funkcji quasi-gwiaździstych (twierdzenie 1.2$'$) wprowadzonych przez I.Dziubińskiego [9] i badanych między innymi w [3]. Równanie typu Löwnera rozszerzono na szereg innych klas funkcji quasi-gwiaździstych (twierdzenie 1.7, 1.9, 1.12), a także na klasy funkcji quasi-gwiaździstych z ustalonymi bądź znikającymi współczynnikami.

Wykorzystując uzyskane równanie podano w rozważanych klasach dokładne oszacowania funkcjonałów

$$|\varphi(z)|\ ,\quad \arg\frac{\varphi(z)}{z}\ ,\quad \arg\frac{z\,\varphi'(z)}{\varphi(z)}\ ,\quad \left|\frac{z\,\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|$$

dla ustalonego $z \in K_1$ (twierdzenia 1.8, 1.10, 1.11, 1.13-1.17). Uzyskane wyniki, przy odpowiedniej specyfikacji parametrów, przechodzą w oszacowania zawarte w [3], [40], [36], [24]. W ten sposób otrzymano oszacowanie np. $|f(z)|$, $z \in K_1$, dla

funkcji wypukłych i gwiaździstych z ustalonym drugim współczynnikiem. Interesującym jest fakt, że oszacowania $|f(z)|$, $z \in K_1$ dla funkcji $\frac{1}{2}$-gwiaździstych i funkcji wypukłych z ustalonym drugim współczynnikiem są różne, podczas gdy dla całych klas funkcji pokrywają się.

Oszacowanie $\left|\arg \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|$ dla funkcji quasi-gwiaździstych pozwoliło wyznaczyć koło gwiaździstości tych funkcji.

Rozdział drugi poświęcony jest badaniu zbiorów pokrycia

$$\bigcup_{F} F(Kr) \quad , \quad \bigcap_{F} F(Kr)$$

$Kr = \{z: |z| < r, 0 < r \leq 1\}$ dla funkcji F gwiaździstych i wypukłych z unormowaniem Montela. Wyznaczono w szczególności tzw. zbiory Koebego dla funkcji gwiaździstych i wypukłych inną metodą niż metoda użyta przez J.Krzyża i E.Złotkiewicza [16] w przypadku r=1. Wskazano również ich zastosowanie do rozwiązywania tzw. uogólnionego problemu odwrotnego w teorii podporządkowania funkcji.

W rozdziale trzecim zbadano klasę T_M funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych, $|f(z)| < M$, $M > 1$. Otrzymano między innymi, dokładny obszar zmienności funkcjonału $\{f(z)\}$, dla ustalonego $z \in K_1$ i $f \in T_M$, oraz oszacowania współczynników. Wykazano również, że klasa T_M nie obejmuje całej klasy funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych przez M.

Wyniki znane wcześniej dla całej klasy funkcji typowo-rzeczywistych uzyskuje się kładąc $M \longrightarrow \infty$ [1], [10].

W zakończeniu rozdziału trzeciego podano szczegółowy dowód wyznaczania maksymalnego obszaru jednolistności funkcji

typowo-rzeczywistych. Wynik ten uzyskano badając funkcjonał $\frac{f(z_1) - f(z_1)}{z_1 - z_2}$, $z_1, z_2 \in K_1$. Zastosowana metoda różni się od użytej przez A.W.Goodmana w [12] i zapełnia w ten sposób występującą tam lukę dowodową.

Część wyników podanych w pracy opublikowano w [19], [20], [21], [34], [37].

R o z d z i a ł I

Uogólnione równanie Löwnera dla pewnych klas funkcji jednolistnych

1. W niniejszym rozdziale wyprowadzono równanie typu Löwnera dla pewnych klas funkcji jednolistnych oraz podano jego zastosowania w oszacowaniu różnych funkcjonałów w rozważanych klasach. Otrzymane równanie uzyskano w wyniku rozważań dotyczących geometrycznych własności badanych klas funkcji.

Na wstępie podamy konieczne oznaczenia i definicje.

Oznaczmy przez $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ klasę funkcji p holomorficznych w kole K_1 ($K_r = \{z : |z| < r, 0 < r \leq 1\}$) postaci

(1.1) $$p(z) = e^{i\alpha} + p_1 z + p_2 z^2 + \dots ,$$

spełniających warunek

(1.2) $$\operatorname{Re} p(z) > 0 , \quad z \in K_1 .$$

Przez S oznaczać będziemy klasę funkcji holomorficznych i jednolistnych w K_1 postaci

(1.3) $$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots ,$$

a przez S^c, S^*, K odpowiednio podklasy klasy S, których

Rozdział I

Uogólnione równanie Löwnera dla pewnych klas funkcji jednolistnych

1. W niniejszym rozdziale wyprowadzono równanie typu Löwnera dla pewnych klas funkcji jednolistnych oraz podano jego zastosowania w oszacowaniu różnych funkcjonałów w rozważanych klasach. Otrzymane równanie uzyskano w wyniku rozważań dotyczących geometrycznych własności badanych klas funkcji.

Na wstępie podamy konieczne oznaczenia i definicje.

Oznaczmy przez $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha \in (-\pi/2 ; \pi/2)$, $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ klasę funkcji p holomorficznych w kole K_1 $(K_r = \{z : |z| < r, 0 < r \leq 1\})$ postaci

$$(1.1) \qquad p(z) = e^{i\alpha} + p_1 z + p_2 z^2 + \dots ,$$

spełniających warunek

$$(1.2) \qquad \operatorname{Re} p(z) > 0 , \quad z \in K_1 .$$

Przez S oznaczać będziemy klasę funkcji holomorficznych i jednolistnych w K_1 postaci

$$(1.3) \qquad f(z) = z + a_2 z^2 + \dots ,$$

a przez S^0, S^*, K odpowiednio podklasy klasy S, których

elementami są funkcje wypukłe, gwiaździste i prawie-wypukłe. Wiadomo, że $S^c \subset S^* \subset K \subset S$ oraz

(1.4) $$f \in S^c \iff 1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P} \,,$$

(1.5) $$f \in S^* \iff \frac{z f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P} \,,$$

(1.6) $$f \in K \iff \bigvee_{\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)} \bigvee_{g \in S^*} e^{i\alpha} \frac{z f'(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}_\alpha \,.$$

Funkcję $g \in S^*$ występującą w (1.6) nazywa się funkcją tworzącą dla funkcji f.

Ponadto przez G^M, $M \geq 1$, oznaczać będziemy klasę funkcji φ quasi-gwiaździstych danych równaniem

(1.7) $$f(\varphi(z)) = \frac{1}{M} f(z) \,, \quad z \in K_1 \,,$$

gdzie f jest dowolną funkcją gwiaździstą [9].

Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę funkcji F postaci

(1.8) $$F(z,t) = a_1(t) z + a_2(t) z^2 + \ldots, a_1(t) > 0, z \in K_1, t \in [0,\infty),$$

holomorficznych i jednolistnych w K_1 dla każdego ustalonego $t \in [0,\infty)$ i takich, że funkcje F i F'_t są ciągłe względem t dla każdego ustalonego $z \in K_1$.

Definicja. Mówimy, że funkcja $F \in \mathcal{F}$ jest obszarowo rosnąca w kole K_r, jeżeli dla $t', t'' \in [0,\infty)$, $t' \leq t''$, $F(K_r, t') \subset F(K_r, t'')$.

Znany jest następujący lemat.

Lemat 1.1[4]. Funkcja $F \in \mathfrak{F}$ jest obszarowo rosnąca w K_1 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1.9) \qquad \operatorname{Re} \frac{F'_t(z,t)}{zF'_z(z,t)} \geqslant 0 , \quad z \in K_1 , \quad t \in [0,\infty).$$

Definicja. Mówimy, że $f \in \mathfrak{M} \subset S$ jeżeli istnieje funkcja jednolistna $g, g(0) = 0$, taka że funkcja F dana wzorem

$$(1.10) \qquad F(z,t) = f(z) + tg(z) , \quad z \in K_1$$

jest jednolistna dla każdego $t \in [0,\infty)$ i obszarowo rosnąca w K_1.

Wprowadzona wyżej rodzina $\mathfrak{F}$ jest analogiczna do rodzin funkcji rozważanych w [25], [28].

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1. $\mathfrak{M} = K$, gdzie K jest klasą funkcji prawie-wypukłych w sensie Kaplana lub, co na jedno wychodzi, liniowo-osiągalnych w sensie Biernackiego [5].

Dowód. Niech $f \in \mathfrak{M}$. Z równości (1.10) wynika, że

$$\frac{z F'_z(z,t)}{F'_t(z,t)} = \frac{z f'(z)}{g(z)} + t \frac{z g'(z)}{g(z)} .$$

Ponieważ rodzina $\mathfrak{M}$ jest obszarowo rosnąca, to na mocy (1.9) mamy

$$(1.11) \qquad \operatorname{Re} \left[\frac{z f'(z)}{g(z)} + t \frac{z g'(z)}{g(z)} \right] > 0 , \quad z \in K_1 .$$

Warunek (1.11) zachodzi dla każdego $t \in [0,\infty)$, zatem

Lemat 1.1[4]. Funkcja $F \in \mathcal{F}$ jest obszarowo rosnąca w K_1 wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.9) $\quad \mathrm{Re}\,\frac{F'_t(z,t)}{zF'_z(z,t)} \ge 0$, $z \in K_1$, $t \in [0,\infty)$.

Definicja. Mówimy, że $f \in \mathfrak{M} \subset S$ jeżeli istnieje funkcja jednolistna g, $g(0)=0$, taka że funkcja F dana wzorem

(1.10) $\quad F(z,t) = f(z) + tg(z)$, $z \in K_1$

jest jednolistna dla każdego $t \in [0,\infty)$ i obszarowo rosnąca w K_1.

Wprowadzona wyżej rodzina $\mathcal{F}$ jest analogiczna do rodzin funkcji rozważanych w [25], [26].

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.1. $\mathfrak{M} = K$, gdzie K jest klasą funkcji prawie-wypukłych w sensie Kaplana lub, co na jedno wychodzi, liniowo-osiągalnych w sensie Biernackiego [5].

Dowód. Niech $f \in \mathfrak{M}$. Z równości (1.10) wynika, że

$$\frac{zF'_z(z,t)}{F'_t(z,t)} = \frac{zf'(z)}{g(z)} + t\,\frac{zg'(z)}{g(z)}.$$

Ponieważ rodzina $\mathfrak{M}$ jest obszarowo rosnąca, to na mocy (1.9) mamy

(1.11) $\quad \mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{g(z)} + t\,\frac{zg'(z)}{g(z)}\right] > 0$, $z \in K_1$.

Warunek (1.11) zachodzi dla każdego $t \in [0,\infty)$, zatem

w szczególności dla $t = 0$ i $t \longrightarrow \infty$ mamy

$$(1.12) \qquad \mathrm{Re}\,\frac{z f'(z)}{g(z)} > 0 , \quad z \in K_1 ,$$

$$(1.13) \qquad \mathrm{Re}\,\frac{z g'(z)}{g(z)} > 0 , \quad z \in K_1 .$$

Warunek (1.13) oznacza, że funkcja g jest gwiaździsta. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że

$$(1.14) \qquad g(z) = e^{-i\alpha} z + A_2 z^2 + \ldots, \quad \alpha \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Warunek (1.12) implikuje, że $f \in K$, skąd $\mathfrak{M} \subset K$.

Niech teraz $f \in K$. Wtedy istnieje funkcja gwiaździsta g postaci (1.14) taka, że

$$(1.15) \qquad \mathrm{Re}\,\frac{z f'(z)}{g(z)} > 0 , \quad z \in K_1 .$$

Rozważmy klasę funkcji F danych wzorem (1.10), gdzie $f \in K$, a g jest funkcją tworzącą dla funkcji f.

Można zauważyć, że dla każdego $t \in [0, \infty)$ funkcja

$$F(z,t) = f(z) + tg(z)$$

jest funkcją jednolistną, jako że jest prawie wypukłą, bowiem

$$(1.16) \qquad \mathrm{Re}\,\frac{zF'_z(z,t)}{g(z)} = \mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{g(z)} + t\,\mathrm{Re}\,\frac{zg'(z)}{g(z)} > 0 , \quad z \in K_1 .$$

Warunek (1.16) oznacza jednocześnie na mocy lematu 1.1 obszarową monotoniczność rodziny funkcji F, bowiem $g(z) = F'_t(z,t)$. Stąd $f \in \mathfrak{M}$ i $K \subset \mathfrak{M}$, co kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 1.2. Funkcja $f \in \mathfrak{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy da się przedstawić w postaci

$$(1.17) \qquad f(z) = \lim_{t \to \infty} (1 + t e^{-i\alpha}) h(z,t) ,$$

gdzie h jest rozwiązaniem równania

$$(1.18) \qquad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = -h(z,t) \frac{1}{P_1[h(z,t)] + t\, P_2[h(z,t)]}$$

z warunkiem początkowym $h(z,0) = z$, gdzie $P_1 \in \mathcal{P}_\alpha$, $P_2 \in \mathcal{P}$.

Dowód. Udowodnimy najpierw, że warunek występujący w twierdzeniu jest konieczny. Załóżmy, że $f \in \mathfrak{M}$. Rozważmy funkcję

$$(1.19) \qquad h(z,t) = F^{-1}\left[F(z,0),t\right] ,$$

gdzie F dana jest wzorem (1.10).

Z(1.19) otrzymujemy

$$(1.20) \qquad F\left[h(z,t),t\right] = F(z,0) = f(z) .$$

Różniczkując (1.20) względem t otrzymujemy

$$(1.21) \qquad \frac{\partial F[h(z,t),t]}{\partial h(z,t)} \cdot \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial F[h(z,t),t]}{\partial t} = 0 .$$

Uwzględniając (1.10) i (1.21) otrzymujemy

$$(1.22) \qquad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = \frac{-h(z,t)}{h(z,t)\dfrac{\dfrac{\partial f[h(z,t)]}{\partial h(z,t)}}{g[h(z,t)]} + t\,\dfrac{h(z,t)\dfrac{\partial g[h(z,t)]}{\partial h(z,t)}}{g[h(z,t)]}} ,$$

co na mocy twierdzenia 1.1 implikuje (1.18).

Spełnienie warunku początkowego $h(z,0) = z$ wynika z (1.19).

Wykażemy teraz, że każda funkcja $f \in \mathfrak{M}$ da się przedstawić wzorem (1.17), gdzie h jest rozwiązaniem równania (1.18). Zauważmy najpierw, że $h'_z(0,t) = (1 + t e^{-i\alpha})^{-1}$, co jest konsekwencją równości $\dfrac{\partial F[h(0,t),t]}{\partial h(0,t)} = 1 + t e^{-i\alpha}$.

Ale ze wzoru (1.20) mamy $h'_z(0,t) = f'(0)\left\{\dfrac{\partial F[h(0,t),t]}{\partial h(0,t)}\right\}^{-1}$,

skąd wynika $a_1(t) = (1 + t e^{-i\alpha})^{-1}$.

Jednolistność funkcji $h(z,t)$ dla $z \in K_1$ i każdego $t \in [0,\infty)$ oraz warunki $\lim\limits_{t\to\infty} h'_z(0,t) = 0$ i $h(0,t) = 0$ implikują na mocy twierdzenia Hurwitza

$$(1.23) \qquad h(z,\infty) = \lim_{t\to\infty} h(z,t) = 0 .$$

Z równości (1.20) i (1.10) otrzymujemy

$$(1.24) \qquad f(z) = f[h(z,t)] + tg[h(z,t)] .$$

kładąc $t \longrightarrow \infty$ w (1.24) otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} f(z) = \lim_{t\to\infty} f[h(z,t)] + \lim_{t\to\infty} tg[h(z,t)] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} t[e^{-i\alpha} h(z,t) + A_2 h^2(z,t) + \ldots] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} (1 + t e^{-i\alpha}) h(z,t) \left[\frac{t e^{-i\alpha}}{1+t e^{-i\alpha}} + \frac{t A_2}{1+t e^{-i\alpha}} h(z,t) + \ldots\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} (1 + t e^{-i\alpha}) h(z,t) ,$$

co kończy dowód warunku koniecznego.

Wykażemy teraz, że warunek jest dostateczny.

Niech h będzie rozwiązaniem równania (1.18) z warunkiem początkowym $h(z,0) = z$ i niech $f(z) = \lim_{t\to\infty} (1+te^{-i\alpha})h(z,t)$.

Wykażemy, że $f \in \mathfrak{M}$. Z dowolności funkcji $P_1 \in \mathcal{P}_\alpha$ i $P_2 \in \mathcal{P}$ wynika, że istnieje taka funkcja gwiaździsta $g(z) = e^{-i\alpha} z + A_2 z^2 + \dots$ i $f \in K$, że

$$(1.25)\qquad P_1[h(z,t)] = \frac{h(z,t)\dfrac{\partial f[h(z,t)]}{\partial h(z,t)}}{g[h(z,t)]},\quad P_2[h(z,t)] = \frac{h(z,t)\dfrac{\partial g[h(z,t)]}{\partial h(z,t)}}{g[h(z,t)]}$$

Podstawiając (1.25) do (1.18) otrzymamy

$$(1.26)\qquad \frac{\partial f[h(z,t)]}{\partial h(z,t)} + t\frac{\partial g[h(z,t)]}{\partial h(z,t)}\ \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} + g[h(z,t)] = 0.$$

Można zauważyć, że równanie (1.26) może być otrzymane w wyniku różniczkowania względem t równości (1.20), gdzie F dana jest wzorem (1.10). Dowód faktu, że $F(z,t)$ jest jednolistna i obszarowo rosnąca jest identyczny jak w twierdzeniu 1.1. Zatem $f \in \mathfrak{M}$, co kończy dowód twierdzenia.

Rodzina $\mathfrak{M}$ zdefiniowana wyżej jest identyczna z klasą funkcji prawie-wypukłych (tw.1.1) w przypadku, gdy g jest funkcją gwiaździstą postaci (1.14). Odpowiedni dobór funkcji gwiaździstych g generuje inne znane klasy funkcji jednolistnych.

Przykłady:

a) jeżeli $g \in S^*$, to $\mathfrak{M}$ jest podklasą funkcji prawie wypukłych otrzymaną w [2]. W tym przypadku $P_1 \in \mathcal{P}$ i $P_2 \in \mathcal{P}$;

b) jeżeli $g(z) \equiv z$, to $\mathfrak{M}$ jest klasą funkcji z ograniczonym obrotem ($\operatorname{Re} f'(z) > 0$, $z \in K_1$). W tym przypadku $P_1 \in \mathcal{P}$, $P_2(z) \equiv 1$;

c) jeżeli $g(z) = z f'(z)$, to $\mathfrak{M} = S^c$. Wtedy $P_1(z) \equiv 1$, $P_2 \in \mathcal{P}$;

d) jeżeli $g(z) = f(z)$, to $\mathfrak{M} = S^*$. Wtedy $P_1 = P_2 \in \mathcal{P}$;

e) jeżeli $g(z) = z\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$, to $\mathfrak{M}$ jest klasą funkcji β-gwiaździstych ($0 \leq \beta < 1$), t.j. spełniających warunek

$$\operatorname{Re} \frac{z f'(z)}{f(z)} > \beta, \quad z \in K_1; \tag{1.27}$$

f) jeżeli $g(z) = f(z)\left|\frac{z f'(z)}{f(z)}\right|^{\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, to $\mathfrak{M}$ jest klasą funkcji γ-wypukłych wprowadzonych w [25];

g) jeżeli $g(z) = z\exp \int_0^z \left\{\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{1-\gamma}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{\gamma} - 1\right\}\frac{dz}{z}$,

$\gamma \in [0,1]$, to $\mathfrak{M}$ jest klasą funkcji γ-gwiaździstych wprowadzonych w [22].

Analogicznie jak w przypadkach a)- d) również w przypadkach e)- g) funkcje P_1 i P_2 występujące w równaniu (1.18) muszą być stosownie dobrane.

Innym ważnym przykładem rodziny $\mathfrak{M}$ jest klasa G^M funkcji quasi-gwiaździstych. Można zauważyć, że definicja (1.7) klasy G^M może być podana za pomocą podporządkowania, bowiem warunek (1.7) jest równoważny

$$(1.28) \qquad f(z) \prec M f(z) \ , \quad M \geq 1 \ , \quad f \in S^* \ ,$$

gdzie $\prec$ oznacza relację podporządkowania [11].
Zatem jeżeli przyjmiemy, że w (1.10) $f \in S^*$ i $g = f$ oraz $t \in [0, M-1]$, to rozwiązania równania (1.18) dla $t = M-1$ będą funkcjami quasi-gwiaździstymi.

W tym celu wygodnie jest sformułować twierdzenie 1.2 dla klasy G^M w następującej postaci.

Twierdzenie 1.2'. Funkcja $\varphi \in G^M (M = e^T)$ wtedy i tylko wtedy, gdy da się przedstawić w postaci

$$(1.29) \qquad \varphi(z) = h(z,T) \ ,$$

gdzie $h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania

$$(1.30) \qquad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = -h(z,t) P[h(z,t)] \ , \qquad 0 \leq t \leq T$$

z warunkiem początkowym $h(z,0) = z$, gdzie $P \in \mathcal{P}$.

Podamy obecnie zastosowania twierdzeń 1.2 i 1.2'.

Jako pierwsze zastosowanie podamy oszacowanie $|f(z)|$ dla ustalonego $z \in K_1$ i f zmieniającej się w klasie S^c.

Niech $f \in S^c$. Wtedy na mocy twierdzenia 1.2

$$(1.31) \qquad f(z) = \lim_{t \to \infty} (1+t) h(z,t) \ ,$$

gdzie h jest rozwiązaniem równania

$$(1.32) \qquad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = - \frac{h(z,t)}{1 + t\, P[h(z,t)]}$$

z warunkiem początkowym $h(z,0) = z$ i $P \in \mathcal{P}$.

Równanie (1.32) można zapisać w postaci

$$(1.33)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\log h(z,t) = -\Big(1 + t\,P\big[h(z,t)\big]\Big)^{-1}.$$

Stąd, porównując części rzeczywiste w (1.33), otrzymujemy

$$(1.34)\qquad \frac{dt}{d|h|} = -\frac{1}{|h|\operatorname{Re}Q(h)},$$

gdzie $h = h(z,t)$, $d|h| = \partial|h(z,t)|$, $dt = \partial t$, $Q(h) = \big[1+tP(h)\big]^{-1}$.

Znane oszacowanie dla ReP, gdy $P \in \mathcal{P}$ daje

$$\left\{1 + t\,\frac{1+|h|}{1-|h|}\right\}^{-1} \le \operatorname{Re} Q(h) \le \left\{1 + t\,\frac{1-|h|}{1+|h|}\right\}^{-1},$$

co dowodzi następującego twierdzenia.

Twierdzenie 1.3. Jeżeli $h = h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania (1.32), to

$$(1.35)\qquad -\frac{1-|h| + t(1+|h|)}{|h|(1-|h|)} \le \frac{dt}{d|h|} \le -\frac{1+|h| + t(1-|h|)}{|h|(1+|h|)}.$$

Nierówności (1.35) są dokładne, a znak równości ma miejsce, gdy funkcja $P \in \mathcal{P}$ występująca w równaniu (1.32) ma postać

$$P(h) = \frac{1 + h\,e^{-i\varphi}}{1 - h\,e^{-i\varphi}},\quad \varphi \in (-\pi, \pi],\ \varphi = \arg h(z,t).$$

W dalszym ciągu mamy

Twierdzenie 1.4. Jeżeli $h = h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania (1.32), to

$$(1.36)\qquad \frac{1+|h|}{|h|} - \frac{1}{1+r}\,\frac{(1+|h|)^2}{|h|} \le t \le -\frac{1-|h|}{|h|} + \frac{1}{1-r}\,\frac{(1-|h|)^2}{|h|},$$

gdzie $r = |z| < 1$.

Dowód. Wykażemy lewą stronę nierówności (1.36). Z (1.19), (1.23) i (1.34) i definicji funkcji Q wynika, że $t = t(|h|)$ jest funkcją malejącą od ∞ do 0, gdy $|h| \in (0,r]$. Połóżmy $x = |h|$. Wykażemy, że

$$(1.37) \qquad t(x) \geqslant \Psi(x), \quad x \in (0,r]$$

gdzie Ψ spełnia równanie różniczkowe liniowe

$$(1.38) \qquad \Psi'(x) = -\frac{1+x+(1-x)\Psi(x)}{x(1+x)}$$

z warunkami $\Psi(0) = \infty$, $\Psi(r) = 0$.
Niech $\Phi(x) = t(x) - \Psi(x)$. Biorąc pod uwagę (1.35) i (1.38) otrzymujemy

$$(1.39) \qquad \Phi'(x) \leq -\Phi(x)\,\frac{1-x}{x(1+x)}.$$

Załóżmy, że nierówność (1.37) nie zachodzi. Wtedy istnieje $x_0 \in (0,r)$ takie, że $\Phi(x_0) < 0$. Z ciągłości Φ wynika istnienie $x_1 \in (x_0,r)$ takiego, że $\Phi(x) < 0$ w przedziale $[x_0,x_1)$ i $\Phi(x_1) = 0$. Niech $x^* \in (x_0,x_1)$. Całkując stronami nierówność (1.39) w przedziale (x_0,x^*), otrzymujemy

$$-\Big[\log|\Phi(x)|\Big]\Big|_{x_0}^{x^*} \leqslant \left[\log\frac{x}{(1+x)^2}\right]\Big|_{x_0}^{x^*}.$$

Gdy $x^* \longrightarrow x_1$, to $\Phi(x_0) \geqslant 0$, gdyż $\Phi(x_1) = 0$, co jest sprzeczne z przypuszczeniem, że $\Phi(x_0) < 0$.
Tak więc udowodniliśmy (1.37), a tym samym prawdziwość lewej strony (1.36). Dowód prawej strony nierówności (1.36) jest

analogiczny. Dokładność (1.36) wynika z dokładności (1.35).

Mnożąc teraz stronami (1.36) przez $|h|$ i wykorzystując fakt, że

$$\lim_{t\to\infty} t\, h(z,t) = \lim_{t\to\infty} (1+t)\, h(z,t) = f(z) \in S^c ,$$

otrzymujemy następujące znane twierdzenie [24].

Twierdzenie 1.5. Jeżeli $f \in S^c$, to

$$(1.40) \qquad \frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}, \qquad |z| = r < 1.$$

Znaki równości w(1.40)zachodzą tylko dla funkcji postaci

$$f(z) = \frac{z}{1+\varepsilon z}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Jako zastosowanie twierdzenia 1.2' podamy oszacowanie $\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}$ dla ustalonego $z \in K_1$ i $f \in G^M$.

Twierdzenie 1.6. Jeśli $f \in G^M$, to

$$(1.41) \qquad \left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \log \frac{1-|f(z)|}{1+|f(z)|}\,\frac{1+r}{1-r}, \qquad r = |z| < 1.$$

Dowód. Równanie (1.30) jest równoważne układowi równań:

$$d \log h(z,t) = - \operatorname{Re} P[h(z,t)]\, dt$$

$$d \arg h(z,t) = - \operatorname{Im} P[h(z,t)]\, dt .$$

stąd otrzymujemy

$$d \arg h(z,t) = \frac{\operatorname{Im}P[h(z,t)]}{\operatorname{Re}P[h(z,t)]}\, d \log|h(z,t)|$$

1

$$d \arg h_z'(z,t) = \frac{\operatorname{Im}\left\{P[h(z,t)] + h(z,t)\,P'[h(z,t)]\right\}}{\operatorname{Re} P[h(z,t)]}\, d \log|h(z,t)|.$$

Z powyższych relacji mamy

$$(1.42)\quad d \arg \frac{h_z'(z,t)}{h(z,t)} = \frac{\operatorname{Im}\left\{h(z,t)\,P'[h(z,t)]\right\}}{\operatorname{Re} P[h(z,t)]}\, d \log|h(z,t)|.$$

Z założenia wynika, że $f \in G^M$, czyli $P \in \mathcal{P}$.

Stosując wzór Riesza - Herglotza

$$(1.43)\quad P(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\, d\mu(\theta), \qquad \zeta \in K_1,$$

gdzie μ jest funkcją niemalejącą w $[0,2\pi]$ i $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1$,

otrzymujemy

$$(1.44)\quad \operatorname{Re} P[h(z,t)] = \int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1+x^2-2x\cos\psi}\, d\mu(\theta).$$

oraz

$$(1.45)\quad \operatorname{Im}\left\{P'[h(z,t)]\,h(z,t)\right\} = \int_0^{2\pi} \frac{2x(1-x^2)\sin\psi}{(1+x^2-2x\cos\psi)^2}\, d\mu(\theta),$$

gdzie $x = |h(z,t)|$, $h(z,t) = xe^{i\varphi}$, $\psi = \varphi - \theta$, $|z| = r$.

Z (1.44) i (1.45) otrzymujemy

$$(1.46)\quad -\frac{2x}{1-x^2}\int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1+x^2-2x\cos\psi}\, d\mu(\theta) \le \int_0^{2\pi} \frac{2x(1-x^2)\sin\psi}{(1+x^2-2x\cos\psi)^2}\, d\mu(\theta) \le$$

$$\le \frac{2x}{1-x^2}\int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1+x^2-2x\cos\psi}\, d\mu(\theta).$$

Z (1.42) i (1.46) wynika

$$(1.47)\quad \frac{2x}{1-x^2}\, d \log x \leq d \arg \frac{hz'(z,t)}{h(z,t)} \leq -\frac{2x}{1-x^2}\, d \log x .$$

Całkując nierówności (1.47) w przedziale $[0,T]$ i korzystając z warunku początkowego $h(z,0) = z$, otrzymujemy(1.41).

Oszacowania (1.41) są dokładne, a funkcja ekstremalna dana jest równaniem (1.7), gdzie f spełnia równanie

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{e^{i(\varphi-\psi(x))}+z}{e^{i(\varphi-\psi(x))}-z} ,$$

gdzie $\psi(x) = \arc\cos \frac{2x}{1+x^2}$, a $\varphi \in [0,2\pi]$ i $x = |h(z,t)|$ są ustalone.

Wniosek. Wykorzystując oszacowanie (1.41) i oszacowanie $|f(z)|$ dla $f \in G^M$ [3], otrzymujemy

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \log \frac{\sqrt{(1+r)^2 - \frac{4r}{M}}}{1-r} .$$

Ostatnia nierówność implikuje, że każda funkcja klasy G^M jest gwiaździsta co najmniej w kole

$$|z| < r_* = \frac{2\sqrt{\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(e^{\pi}-\frac{1}{M}\right)} - \left(1-\frac{2}{M}+e^{\pi}\right)}{1-e^{\pi}}$$

Dokładny promień gwiaździstości klasy G^M nie jest znany.

2. Wykorzystując definicję klasy G^M daną wzorem (1.7) można za pomocą różnego doboru funkcji gwiaździstych, otrzy-

mać odpowiednie podklasy funkcji quasi-gwiaździstych.

Zajmiemy się niżej niektórymi z nich i w tym celu wprowadzimy dalsze definicje i oznaczenia.

Niech H oznacza daną funkcję holomorficzną i jednolistną w K_1, odwzorowującą K_1 na obszar zawarty w prawej półpłaszczyźnie, tj. $H(0) = 1$, $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in K_1$.

Przez $S^*(H)$ oznaczać będziemy klasę funkcji f postaci (1.3) holomorficznych w K_1 i takich, że

$$(1.48) \qquad \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec H(z) \qquad \text{dla} \qquad z \in K_1$$

Znak $\prec$ oznacza, że funkcja $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ jest podporządkowana obszarowo funkcji H, tj. istnieje funkcja ω holomorficzna w K_1 i taka, że $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ i $\frac{zf'(z)}{f(z)} = H(\omega(z))$.

Znane są następujące przypadki klasy $S^*(H)$:

a) jeżeli H odwzorowuje K_1 na prawą półpłaszczyznę, to $S^*(H) = S^*$;

b) jeżeli H odwzorowuje K_1 na półpłaszczyznę $\operatorname{Re} w > \beta$, $0 \leq \beta < 1$, to $S^*(H)$ jest klasą funkcji β-gwiaździstych (1.27) ;

c) jeżeli H jest odwzorowaniem koła K_1 na kąt $\{w : |\arg w| < \beta \pi/2 \, , \, 0 < \beta \leq 1\}$, to $S^*(H)$ jest klasą funkcji β-kątowo-gwiaździstych [33] ;

d) jeżeli H jest odwzorowaniem koła K_1 na obszar ograniczony krzywą $w = \left(\frac{\gamma}{\cos\theta}\right)^{\frac{2\beta}{\pi}} e^{i\frac{2\beta}{\pi}\theta}$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \gamma < 1$,

mać odpowiednie podklasy funkcji quasi-gwiaździstych. Zajmiemy się niżej niektórymi z nich i w tym celu wprowadzimy dalsze definicje i oznaczenia.

Niech H oznacza daną funkcję holomorficzną i jednolistną w K_1, odwzorowującą K_1 na obszar zawarty w prawej półpłaszczyźnie, tj. $H(0) = 1$, $\operatorname{Re} H(z) > 0$, $z \in K_1$.

Przez $S^*(H)$ oznaczać będziemy klasę funkcji f postaci (1.3) holomorficznych w K_1 i takich, że

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec H(z) \quad \text{dla} \quad z \in K_1 \tag{1.48}$$

Znak $\prec$ oznacza, że funkcja $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ jest podporządkowana obszarowo funkcji H, tj. istnieje funkcja ω holomorficzna w K_1 i taka, że $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$ i $\frac{zf'(z)}{f(z)} = H(\omega(z))$;

Znane są następujące przypadki klasy $S^*(H)$:

a) jeżeli H odwzorowuje K_1 na prawą półpłaszczyznę, to $S^*(H) = S^*$;

b) jeżeli H odwzorowuje K_1 na półpłaszczyznę $\operatorname{Re} w > \beta$, $0 \le \beta < 1$, to $S^*(H)$ jest klasą funkcji β-gwiaździstych (1.27) ;

c) jeżeli H jest odwzorowaniem koła K_1 na kąt $\{w : |\arg w| < \beta\pi/2,\ 0 < \beta \le 1\}$, to $S^*(H)$ jest klasą funkcji β-kątowo-gwiaździstych [11] ;

d) jeżeli H jest odwzorowaniem koła K_1 na obszar ograniczony krzywą $W = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^{\frac{2\gamma}{\pi}} e^{i\frac{2\gamma\theta}{\pi}}$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $0 < \gamma \le 1$,

$-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$, to $S^*(H) = S^*(\gamma,\beta)$ [38].

Inne przykłady klasy $S^*(H)$ można znaleźć w [34].

Definicja. Będziemy mówić, że φ jest funkcją H-quasi-gwiaździstą, jeśli spełnia równanie (1.7), gdzie f jest dowolną funkcją klasy $S^*(H)$ a M ustaloną liczbą $M \geqslant 1$.

Klasę funkcji H quasi-gwiaździstych oznaczać będziemy przez $G^M(H)$.

Oznaczmy przez $\mathcal{P}(H)$ klasę funkcji p holomorficznych w K_1, takich że $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $p(0) = 1$ i $p(z) \prec H(z)$, $z \in K_1$, a przez $\mathcal{P}(\hat{H})$ klasę funkcji $P = 1/p$, gdzie $p \in \mathcal{P}(H)$.

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.7. Funkcja $\varphi \in G^M(H)$, $M = e^T$, wtedy i tylko wtedy, gdy da się przedstawić w postaci

$$(1.49) \qquad \varphi(z) = h(z,T) ,$$

gdzie $h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania

$$(1.50) \qquad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = - h(z,t) P[h(z,t)] , \quad 0 \leqslant t \leq T ,$$

z warunkiem początkowym $h(z,0) = z$ i $P \in \mathcal{P}(\hat{H})$.

Dowód. Niech $f \in S^*(H)$ generuje $\varphi \in G^M(H), M = e^T$, tj.

$$f[\varphi(z)] = e^{-T} f(z)$$

Rozważając równanie (1.7) z $h = h(z,t)$, $M = e^t$, $t \geqslant 0$, otrzymujemy

$$(1.51) \qquad f[h(z,t)] = e^{-t} f(z) ,$$

Skąd po zróżniczkowaniu względem t mamy

$$(1.52)\qquad \frac{\partial f}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} = -e^{-t}f(z).$$

Dzieląc (1.52) przez (1.51) otrzymamy

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = -\frac{f[h(z,t)]}{h(z,t)\cdot\frac{\partial f[h(z,t)]}{\partial h(z,t)}}.$$

Z założenia $f\in S^{*}(H)$ wynika że $p(w) = \frac{w f'(w)}{f(w)} \in \mathcal{P}(H)$, lub $P(w) = \frac{1}{p(w)} \in \mathcal{P}(\hat{H})$, co oznacza, że jeśli $\varphi \in G^{M}(H)$, to $\varphi(z) = h(z,T)$, gdzie h spełnia równanie (1.50).

Załóżmy teraz na odwrót, że funkcja $h(z,t)$ spełnia równanie (1.50), gdzie $P\in\mathcal{P}(\hat{H})$. Istnieje zatem funkcja $p = \frac{1}{P}\in\mathcal{P}(H)$, że

$$p(w) = \frac{w f'(w)}{f(w)},$$

gdzie $f\in S^{*}(H)$. Z (1.50) mamy

$$(1.53)\qquad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = -\frac{f[h(z,t)]}{\frac{\partial f[h(z,t)]}{\partial h}}.$$

Po rozdzieleniu zmiennych w (1.53) otrzymujemy

$$\frac{\partial f[h(z,t)]}{f[h(z,t)]} = -\partial t.$$

Całkując stronami powyższą równość w przedziale $[0,T]$ i wykorzystując warunek początkowy $h(z,0) = z$, otrzymamy

$$\log f[h(z,t)]\Big|_{z}^{h(z,T)} = -t\Big|_{0}^{T},$$

skąd

$$f\left(h(z,T)\right) = e^{-T}f(z) .$$

Tak więc $\varphi(z) = h(z,T) \in G^M(H)$, co kończy dowód twierdzenia.

Następujące twierdzenie stanowi zastosowanie twierdzenia 1.7.

Twierdzenie 1.8. Niech $\varphi \in G^M(H)$, gdzie

$$(1.54)\qquad H(z) = \left[(1-\gamma)\frac{1+z}{1-z}+\gamma\right]^{2\beta/\pi} , \quad 0 \le \gamma < 1,\ -\pi/2 \le \beta \le \pi/2.$$

Wtedy

$$(1.55)\qquad \left|\arg\frac{\varphi(z)}{z}\right| \le -\int_{|z|}^{|\varphi(z)|} \operatorname{tg}\frac{2\beta}{\pi}\left[\arc\sin\frac{2x}{1+x^2+\frac{\gamma}{1-\gamma}(1-x^2)}\right]\frac{dx}{x},$$

$x = |h(z,t)|$, $T = \log M$.

Dowód. Każda funkcja $f \in S^*(H)$, gdzie H dana jest wzorem (1.54) spełnia równanie

$$(1.56)\qquad p(z) = \frac{\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\pi/2\beta} - \gamma}{1-\gamma} ,$$

gdzie $p \in \mathcal{P}$.

Równanie (1.50) w rozważanym przypadku można zapisać w postaci następujących równań:

$$(1.57)\qquad \begin{aligned} d\log|h(z,t)| &= -\operatorname{Re} P^{\frac{-2\beta}{\pi}}\left(h(z,t)\right)\ dt \\ d\arg h(z,t) &= -\operatorname{Im} P^{\frac{-2\beta}{\pi}}\left(h(z,t)\right)\ dt , \end{aligned}$$

gdzie funkcja P spełnia warunek $\operatorname{Re}P(z) > \gamma$, $z \in K_1$.

Z (1.57) otrzymujemy

$$(1.58) \qquad d \arg h(z,t) = \frac{\operatorname{Im}P^{\frac{-2\beta}{\pi}}(h(z,t))}{\operatorname{Re}P^{\frac{-2\beta}{\pi}}(h(z,t))} \, d \log|h(z,t)| =$$

$$= - \operatorname{tg} \frac{2\beta}{\pi} \left\{ \arg P[h(z,t)] \right\} d \log|h(z,t)| \, .$$

Wykorzystując dobrze znane oszacowanie [4]

$$\left| \arg P[h(z,t)] \right| \leq \arc\sin \frac{2x}{1+x^2 + \frac{\gamma}{1-\gamma}(1-x^2)} \, , \quad x = |h(z,t)| \, ,$$

w (1.58) i scałkowaniu otrzymanej nierówności w przedziale $[0,T]$, otrzymujemy (1.55).

Nierówność (1.55) jest dokładna, przy czym funkcja ekstremalna φ dana jest wzorem (1.7), gdzie f spełnia równanie

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left[\frac{1+(1-2\gamma)iz}{1-iz} \right]^{2\beta/\pi}$$

bądź

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left[\frac{1-(1-2\gamma)iz}{1+iz} \right]^{2\beta/\pi} \, ,$$

w zależności od tego czy realizuje kres dolny czy górny $\arg \frac{\varphi(z)}{z}$.

Wniosek [3]. Kładąc w (1.55) $\beta = \pi/2$ i $\gamma = 0$, mamy

$$(1.59) \qquad \left| \arg \frac{\varphi(z)}{z} \right| \leq \log \frac{1-|\varphi(z)|}{1+|\varphi(z)|} \cdot \frac{1+r}{1-r} \quad , \quad r = |z| < 1.$$

gdzie funkcja P spełnia warunek $\operatorname{Re}P(z) > \gamma$, $z \in K_1$.

Z (1.57) otrzymujemy

$$(1.58)\quad d \arg h(z,t) = \frac{\operatorname{Im} P^{-\frac{2\beta}{\pi}}(h(z,t))}{\operatorname{Re} P^{-\frac{2\beta}{\pi}}(h(z,t))}\, d \log|h(z,t)| =$$

$$= -\operatorname{tg} \frac{2\beta}{\pi}\left\{\arg P[h(z,t)]\right\} d \log|h(z,t)| .$$

Wykorzystując dobrze znane oszacowanie [4]

$$\left|\arg P[h(z,t)]\right| \leq \arc\sin \frac{2x}{1+x^2+\frac{4\gamma}{1-\gamma}(1-x^2)}, \quad x = |h(z,t)|,$$

w (1.58) i scałkowaniu otrzymanej nierówności w przedziale $[0,T]$, otrzymujemy (1.55).

Nierówność (1.55) jest dokładna, przy czym funkcja ekstremalna φ dana jest wzorem (1.7), gdzie f spełnia równanie

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left[\frac{1+(1-2\gamma)iz}{1-iz}\right]^{\frac{2\beta}{\pi}}$$

bądź

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \left[\frac{1-(1-2\gamma)iz}{1+iz}\right]^{\frac{2\beta}{\pi}},$$

w zależności od tego czy realizuje kres dolny czy górny $\arg \frac{\varphi(z)}{z}$.

Wniosek [3]. Kładąc w (1.55) $\beta = \frac{\pi}{2}$ i $\gamma = 0$, mamy

$$(1.59)\quad \left|\arg \frac{\varphi(z)}{z}\right| \leq \log \frac{1+|\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|} \cdot \frac{1+r}{1-r}, \quad r = |z| < 1.$$

Wniosek [40]. Kładąc w (1.55) $\beta = \pi/2$ i $\gamma = \frac{1}{2}$, mamy

$$(1.60)\qquad \left|\arg \frac{\varphi(z)}{z}\right| \leq \arc\sin r - \arc\sin |\varphi(z)| \quad ,$$

czyli oszacowanie $\arg \frac{\varphi(z)}{z}$ dla funkcji quasi-½-gwiaździstych.

Uwaga. Interesującym wydaje się fakt, że w przypadku $M \longrightarrow \infty$ oszacowanie (1.59) nie jest dokładne w klasie S^{*}, podczas gdy (1.60) dla $M \longrightarrow \infty$ jest dokładne w klasie funkcji 1/2-gwiaździstych a nawet dla klasy S^{c} [24].

3. Podamy obecnie inny niż wyżej sposób generowania pewnych klas funkcji quasi-gwiaździstych.

Definicja. Będziemy mówić, że $\varphi \in G^{M}\{m\}$, $M = e^{T}$, $m \in (-1,1]$ jeśli spełnia równanie (1.7), gdzie $\frac{zf'(z)}{f(z)} = p(z)$ oraz

$$(1.61)\qquad p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-mze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta) \quad .$$

Funkcja μ w (1.61) jest niemalejąca w $[0,2\pi]$ i spełnia warunek $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1.$

Zauważmy, że $G^{M}\{1\} = G^{M}$.

Dla klasy funkcji danych wzorem (1.61) prawdziwy jest następujący lemat.

Lemat 1.2. Jeśli funkcja p dana jest wzorem (1.61), to $\operatorname{Re}P(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{p(z)} > \frac{1-m}{2}$, $z \in K_1$.

Dowód. Połóżmy $x = \operatorname{Re}p(z)$, $y = \operatorname{Im}p(z)$. Wtedy

$$\operatorname{Re}P(z) = \operatorname{Re}\frac{1}{p(z)} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Należy więc znaleźć $\min\frac{x}{x^2+y^2}$, gdy x i y zmieniają się w kole

$$\left(x - \frac{1+mr^2}{1-m^2r^2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{(1+m)^2r^2}{(1-m^2r^2)^2}, \quad |z| = r < 1 \quad [26].$$

Wykonując elementarne obliczenia otrzymujemy

$$\min\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\left[1+(1+m)r+mr^2\right](1-m^2r^2)}{2\left[1+(1+m)r+mr^2\right](1+mr^2)-(1-r^2)(1-m^2r^2)}$$

Zatem w całym kole K_1 mamy $\min\frac{x}{x^2+y^2} \geqslant \frac{1-m}{2}$, co kończy dowód lematu.

Dla klasy $G^M\{m\}$, w analogiczny sposób jak dla klasy $G^M(H)$, można sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.9 [37]. Funkcja $\varphi \in G^M\{m\}$, $M = e^T$, $m \in (-1,1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy da się przedstawić w postaci

(1.62) $$\varphi(z) = h(z,T),$$

gdzie $h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania

(1.63) $$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = -h(z,t)P[h(z,t)], \quad 0 \leq t \leq T,$$

z warunkiem początkowym $h(z,0) = z$, gdzie $P(0) = 1$,

$\operatorname{Re}P(z) > \frac{1-m}{2}$, $z \in K_1$.

Twierdzenie 1.9 pozwala oszacować: $\left|\arg \frac{\varphi(z)}{z}\right|$ i

$\left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|$ dla ustalonego $z \in K_1$ i $f \in G^M\{m\}$.

Twierdzenie 1.10. Niech $\varphi \in G^M\{m\}$. Wtedy dla $|z| = r < 1$

$$(1.64)\quad \left|\arg \frac{\varphi(z)}{z}\right| \leqslant \begin{cases} \log \frac{1-|\varphi(z)|}{1+|\varphi(z)|} \cdot \frac{1+r}{1-r} & \text{dla } m=1 \\ \arc \sin r - \arc \sin|\varphi(z)| & \text{dla } m=0 \\ (1+m)\left[H\left(\arc \sin|\varphi(z)|, m\right) - H\left(\arc \sin r, m\right)\right] & \text{dla } m \neq 0 \text{ i } m \neq 1, \end{cases}$$

gdzie H oznacza całkę eliptyczną I rodzaju.

Dowód. Niech $\varphi \in G^M\{m\}$. Wtedy na mocy twierdzenia 1.9 mamy

$$d \arg h(z,t) = \frac{\operatorname{Im}P[h(z,t)]}{\operatorname{Re}P[h(z,t)]}\, d \log|h(z,t)|,$$

gdzie $P(0) = 1$, $\operatorname{Re}P(z) > \frac{1-m}{2}$, $z \in K_1$.

Wykorzystując wzór Herglotza dla funkcji o części rzeczywistej dodatniej nietrudno wykazać, że

$$-\frac{(1+m)x}{\sqrt{(1-mx^2)^2-(1-m)^2x^2}} \leqslant \frac{\operatorname{Im}P[h(z,t)]}{\operatorname{Re}P[h(z,t)]} \leqslant \frac{(1+m)x}{\sqrt{(1-mx^2)^2-(1-m)^2x^2}},$$

$x = |h(z,t)|$, co implikuje

$$\frac{(1+m)\,x\,d\log x}{\sqrt{(1-mx^2)^2-(1-m)^2x^2}} \leqslant d\arg h(z,t) \leqslant \frac{-(1+m)\,x\,d\log x}{\sqrt{(1-mx^2)^2-(1-m)^2x^2}}.$$

Całkując ostatnią nierówność w przedziale $[0,T]$ i wykorzystując warunek początkowy $h(z,0)=z$ otrzymujemy

$$(1+m)\int_{|z|}^{|\varphi(z)|}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} \leqslant \arg\frac{\varphi(z)}{z} \leqslant -(1+m)\int_{|z|}^{|\varphi(z)|}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}$$

co implikuje (1.64).

Funkcja ekstremalna φ dana jest wzorem $f(\varphi(z)) = \frac{1}{M} f(z)$, gdzie

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{(1-mz^2)^2-(1-m)^2z^2 \pm i(1+m)\,z\sqrt{(1-mz^2)^2-(1-m)^2z^2}}{(1+z^2)(1-mz^2)-2(1-m)z^2},$$

gdzie znak + odnosi się do lewej strony (1.64), a znak - do prawej.

Twierdzenie 1.11. Niech $\varphi \in G^M\{m\}$. Wtedy

$$(1.65)\quad \frac{1+m|\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|}\cdot\frac{1-r}{1+mr} \leqslant \left|\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \leqslant \frac{1-|\varphi(z)|}{1+m|\varphi(z)|}\cdot\frac{1+mr}{1-r},\quad |z|=r<1.$$

Dowód. Różniczkując (1.63) mamy

$$(1.66)\quad d\log|h'_z(z,t)| = \left\{1+\frac{\mathrm{Re}\left[h(z,t)\,P'(h(z,t))\right]}{\mathrm{Re}P(h(z,t))}\right\} d\log|h(z,t)|.$$

Ze wzoru Herglotza dla funkcji spełniających warunek $P(0)=1$,

$\operatorname{Re} P(z) > \frac{1-m}{2}$, $z \in K_1$, otrzymamy

$$(1.67)\quad \operatorname{Re} P(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{1-m|\zeta|^2-(1-m)|\zeta|\cos\psi}{1+|\zeta|^2-2|\zeta|\cos\psi}\, d\mu(\theta)$$

$$(1.68)\quad \operatorname{Im} P(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{(1+m)|\zeta|\sin\psi}{1+|\zeta|^2-2|\zeta|\cos\psi}\, d\mu(\theta) ,$$

gdzie $\psi = \varphi_1 - \theta$, $\varphi_1 = \arg\zeta$ i μ jest funkcją niemalejącą w przedziale $[0,2\pi]$ taką, że $\mu(2\pi) - \mu(0) = 1.$

Stąd

$$\operatorname{Re}\left\{h(z,t)\, P'[h(z,t)]\right\} = \frac{1+m}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2x[(1+x^2)\cos\psi-2x]}{(1+x^2-2x\cos\psi)^2}\, d\mu(\theta)$$

co razem z (1.66) - (1.68) daje

$$(1.69)\quad \left[1+\frac{(1+m)x}{1-(1-m)x-mx^2}\right] d\log x \le d\log|h_z'(z,t)| \le$$

$$\le \left[1-\frac{(1+m)x}{1-(1-m)x-mx^2}\right] d\log x .$$

Całkując (1.69) w przedziale $[0,T]$ i wykorzystując warunek początkowy $h(z,0) = z$, otrzymujemy

$$\left[\log x + \log\left|\frac{1+mx}{m(1-x)}\right|\right]_{|z|}^{|\varphi(z)|} \le \log|\varphi'(z)| \le \left[\log x - \log\left|\frac{1+mx}{m(1-x)}\right|\right]_{|z|}^{|\varphi(z)|}$$

skąd

$$\frac{|\varphi(z)|(1+m|\varphi(z)|)}{1-|\varphi(z)|}\,\frac{1-r}{r(1+mr)} \leq |\varphi'(z)| \leq \frac{|\varphi(z)|(1-|\varphi(z)|)}{1+m|\varphi(z)|}\,\frac{1+mr}{r(1-r)} .$$

Funkcja ekstremalna φ w (1.65) jest wyznaczona przez równanie

$$\frac{\varphi(z)}{(1-\varphi(z))^{1+m}} = \frac{1}{M}\cdot\frac{z}{(1-z)^{1+m}}$$

wprzypadku oszacowania od dołu i przez równanie

$$\frac{\varphi(z)}{(1+\varphi(z))^{1+m}} = \frac{1}{M}\cdot\frac{z}{(1+z)^{1+m}}$$

w oszacowaniu od góry.

Dla m=1 otrzymujemy odpowiednie oszacowanie da funkcji quasi-gwiaździstych [3].

Równanie typu Löwnera (1.18) pozwala również wprowadzić klasy funkcji jednolistnych z ustalonymi lub zerującymi się współczynnikami, a równanie (1.18) łącznie z (1.7) analogiczne klasy funkcji quasi-gwiaździstych. Wystarczy założyć, że funkcje P_1 i P_2 w równaniu (1.18) lub funkcja f w (1.7) mają ustalone, bądź zerujące się współczynniki.

Wprowadzimy jeszcze następujące oznaczenia:

$S_b^c \subset S^c$ oznacza podklasę funkcji wypukłych z ustalonym drugim współczynnikiem, t.j. klasę funkcji f postaci

$$(1.70) \qquad f(z) = z + bz^2 + a_3z^3 + \ldots , \quad 0 \leq b \leq 1 ,$$

natomiast $\mathcal{P}_b \subset \mathcal{P}$ podklasę funkcji z częścią rzeczywistą dodatnią postaci

$$(1.71) \qquad p(z) = 1 + 2bz + p_2 z^2 + \dots , \qquad 0 \leq b \leq 1 .$$

Dla klasy S_b^c można sformułować następujący analogon twierdzenia 1.2.

Twierdzenie 1.12. Funkcja $f \in S_b^c$ wtedy i tylko wtedy, gdy da się przedstawić w postaci

$$(1.72) \qquad f(z) = \lim_{t \to \infty} (1 + t)\, h(z,t) ,$$

gdzie $h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania

$$(1.73) \qquad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = - h(z,t)\, \frac{1}{1 + tP\left[h(z,t)\right]} ,$$

z warunkiem początkowym $h(z,0) = z$, a $P \in \mathcal{P}_b$.

Jako zastosowanie twierdzenia 1.12 podamy oszacowanie $|f(z)|$ dla ustalonego $z \in K_1$ i $f \in S_b^c$.

Wykażemy najpierw następujący lemat.

Lemat 1.3. Niech $h = h(z,t)$ będzie rozwiązaniem równania (1.73), gdzie $P \in \mathcal{P}_b$. Oznaczając $\partial |h(z,t)| = d|h|$, $\partial t = dt$, mamy

$$(1.74) \qquad - \frac{1}{|h|}\left[1 + t\, \frac{1+2b|h| + |h|^2}{1-|h|^2}\right] \leq \frac{dt}{d|h|} \leq - \frac{1}{|h|}\left[1 + t\, \frac{1-|h|^2}{1+2b|h| + |h|^2}\right]$$

Dowód. Niech $h = h(z,t)$ będzie rozwiązaniem równania (1.73).

Oddzielając w (1.73) część rzeczywistą i urojoną, otrzymamy

$$\frac{dt}{d|h|} = -\frac{1}{|h|\,\mathrm{Re}\,Q(h)}\,, \tag{1.75}$$

gdzie $Q(h) = (1+t\,P(h))^{-1}$ i $P \in \mathcal{P}_b$.

Wykorzystując fakt, że obszarem zmienności funkcjonału $\{P(z)\}$, $z \in K_1$ i $P \in \mathcal{P}_b$ jest koło $|w - A| \le R$ [32], gdzie

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1-|z|^2)(1-|z|^2+i2b\,\mathrm{Im}\,z) + 2|z|^2(1-b^2)}{(1-|z|^2)(1+|z|^2-2b\,\mathrm{Re}\,z)} \\ R &= \frac{2|z|^2(1-b^2)}{(1-|z|^2)(1+|z|^2-2b\,\mathrm{Re}\,z)} \end{aligned} \tag{1.76}$$

widzimy, że obszarem zmienności funkcjonału

$$\{(1+t\,P(z))^{-1}\},\ z \in K_1 \ \text{ i } \ P \in \mathcal{P}_b \ \text{ jest koło } |w - A_0| \le R_0,$$

gdzie

$$A_0 = \frac{1+t\bar{A}}{|1+tA|^2 - t^2R^2}\,, \qquad R_0 = \frac{tR}{|1+tA|^2 - t^2R^2} \tag{1.77}$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1+t\,\mathrm{Re}\,A - tR}{|1+tA|^2 - t^2R^2} \le \mathrm{Re}\,Q(h) \le \frac{1+t\,\mathrm{Re}A + tR}{|1+tA|^2 - t^2R^2}\,, \tag{1.78}$$

co po prostych przekształceniach daje

$$\left[1 + t\,\frac{1+2b|z|+|z|^2}{1-|z|^2}\right]^{-1} \le \mathrm{Re}\,Q(h) \le \left[1 + \frac{1-|z|^2}{1+2b|z|+|z|^2}\right]^{-1}. \tag{1.79}$$

Nierówność (1.79) jest dokładna. Znak równości z lewej strony ma miejsce dla funkcji $P(z) = \frac{1+2bz+z^2}{1-z^2}$ w punkcie $z=r$, a z prawej strony dla funkcji $P(z) = \frac{1-z^2}{1-2bz+z^2}$ w punkcie $z=-r$. Wzór (1.75) i nierówności (1.79) implikują (1.74).

Mamy teraz jako konsekwencję udowodnionego wyżej lematu, następujące

Twierdzenie 1.13. Jeżeli $f \in S_b^c$, to

$$(1.80) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sqrt{1-b^2}}{1+br} \le |f(z)| \le \Phi(r),$$

gdzie

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{1+b}(1+t)^{1-b}}.$$

Oszacowanie (1.80) jest dokładne, a znak równości ma miejsce dla funkcji

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{1}{1-2bt+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{z+b}{\sqrt{1-b^2}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}\right]$$

w przypadku oszacowania z dołu, oraz dla funkcji

$$f_2(z) = \int_0^z \left[(1-t)^{1+b}(1+t)^{1-b}\right]^{-1} dt$$

w przypadku oszacowania z góry. W obu przypadkach równość zachodzi w punkcie $z=r$.

Dowód. Niech $f \in S_b^c$. Wtedy na mocy twierdzenia 1.12

Nierówność (1.79) jest dokładna. Znak równości z lewej strony ma miejsce dla funkcji $F(z) = \frac{1+2bz+z^2}{1+z^2}$ w punkcie $z=r$, a z prawej strony dla funkcji $F(z) = \frac{1+z^2}{1-2bz+z^2}$ w punkcie $z=-r$. Wzór (1.75) i nierówność (1.79) implikuje (1.74).

Mamy teraz jako konsekwencję udowodnionego wyżej lematu, następujące

Twierdzenie 1.13. Jeżeli $f \in S_b^0$, to

$$(1.80)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{r\sqrt{1-b^2}}{1+br} \le |f(z)| \le \Phi(r)$$

gdzie

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{1+b}(1+t)^{1-b}}\,.$$

Oszacowanie (1.80) jest dokładne, a znak równości ma miejsce dla funkcji

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{1}{1-2bt+t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\left[\text{arc tg}\,\frac{z+b}{\sqrt{1-b^2}} - \text{arctg}\,\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}\right]$$

w przypadku oszacowania z dołu, oraz dla funkcji

$$f_2(z) = \int_0^z \left[(1-t)^{1+b}(1+t)^{1-b}\right]^{-1} dt$$

w przypadku oszacowania z góry. W obu przypadkach równość zachodzi w punkcie $z=r$.

Dowód. Niech $f \in S_b^0$. Wtedy na mocy twierdzenia 1.12

$f(z) = \lim_{t \to \infty} (1+t)\, h(z,t)$, gdzie $h = h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania (1.73).

Całkując nierówność (1.74) i wykorzystując warunek początkowy otrzymujemy

$$(1.81) \quad \frac{1+2b|h|+|h|^2}{|h|\sqrt{1-b^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{r+b}{\sqrt{1-b^2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{|h|+b}{\sqrt{1-b^2}}\right] \leq t \leq$$

$$\leq \frac{(1-|h|)^{1+b}(1+|h|)^{1-b}}{|h|}\left|\Phi(r) - \Phi(|h|)\right| ,$$

gdzie

$$\Phi(x) = \int_0^x \left[(1-t)^{1+b}(1+t)^{1-b}\right]^{-1} dt , \quad b \in [0,1] .$$

Wykorzystując fakt, że $\lim_{t \to \infty} |h(z,t)| = 0$ i $\lim_{t \to \infty} (1+t)|h(z,t)| = |f(z)|$, $f \in S_b^c$, otrzymujemy nierówność (1.80) z (1.81).

Dokładność oszacowań (1.80) wynika z dokładności (1.74).

Kładąc w (1.80) $r \to 1$, z oszacowania od dołu otrzymujemy promień koła pokrycia w klasie S_b^c .

Wniosek. Promień koła pokrycia w klasie S_b^c równa się

$$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-b}{1+b}} .$$

Kładąc w (1.80) b=1 lub b=0 otrzymujemy odpowiednio dokładne oszacowanie modułu funkcji wypukłych i modułu funkcji wypukłych nieparzystych.

$f(z) = \lim_{t\to\infty}(1+t)\,h(z,t)$, gdzie $h = h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania (1.73).

Całkując nierówność (1.74) i wykorzystując warunek początkowy otrzymujemy

$$\frac{1+2b|h|+|h|^2}{|h|\sqrt{1-b^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{r+b}{\sqrt{1-b^2}}-\operatorname{arc\,tg}\frac{|h|+b}{\sqrt{1-b^2}}\right]\leqslant t\leqslant \tag{1.81}$$

$$\leqslant\frac{(1-|h|)^{1+b}(1+|h|)^{1-b}}{|h|}\left[\Phi(r)-\Phi(|h|)\right],$$

gdzie

$$\Phi(x)=\int_0^x\left[(1-t)^{1+b}(1+t)^{1-b}\right]^{-1}dt\,,\quad b\in[0,1].$$

Wykorzystując fakt, że $\lim_{t\to\infty}|h(z,t)| = 0$ i $\lim_{t\to\infty}(1+t)|h(z,t)| = |f(z)|$, $f\in S_b^0$, otrzymujemy nierówność (1.80) z (1.81).

Dokładność oszacowań (1.80) wynika z dokładności (1.74). Kładąc w (1.80) $r\to 1$, z oszacowania od dołu otrzymujemy promień koła pokrycia w klasie S_b^0.

Wniosek. Promień koła pokrycia w klasie S_b^0 równe się

$$\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}\,.$$

Kładąc w (1.80) b=1 lub b=0 otrzymujemy odpowiednie dokładne oszacowania modułu funkcji wypukłych i modułu funkcji wypukłych nieparzystych.

Obecnie podamy oszacowania rozważanych funkcjonałów dla funkcji quasi-gwiaździstych generowanych przez funkcje gwiaździste z ustalonym drugim współczynnikiem bądź zerującymi się początkowymi współczynnikami.

W tym celu oznaczmy przez $S_b^* \subset S$ klasę funkcji holomorficznych i gwiaździstych postaci

$$(1.82) \qquad f(z) = z + 2bz^2 + a_3z^3 + \ldots$$

gdzie b jest ustalone, $b \in [0,1]$.

Niech dalej $G^M[b]$ oznacza klasę funkcji φ quasi-gwiaździstych danych równaniem (1.7), gdzie $f \in S_b^*$. Funkcja $\varphi \in G^M[b]$ ma rozwinięcie

$$(1.83) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{M} z + 2b\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{M^2}\right)z^2 + \ldots , \qquad z \in K_1 .$$

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.14. Jeśli $\varphi \in G^M[b]$, to dla $|z| = r < 1$ mamy

$$(1.84) \qquad \frac{|\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^{1+b}(1+|\varphi(z)|)^{1-b}} \leq \frac{1}{M}\frac{r}{(1-r)^{1+b}(1+r)^{1-b}}$$

oraz

$$(1.85) \qquad \frac{1}{M}\frac{r}{1+2br+r^2} \leq \frac{|\varphi(z)|}{1+2b|\varphi(z)|+|\varphi(z)|^2} .$$

Znaki równości w (1.84) i (1.85) są realizowane odpowiednio przez funkcje φ dane równaniami

$$(1.86)\quad \frac{\varphi(z)}{(1-\varphi(z))^{1+b}(1+\varphi(z))^{1-b}} = \frac{1}{M}\,\frac{z}{(1-z)^{1+b}(1+z)^{1-b}}\,,\ \text{dla } z=r,$$

$$(1.87)\quad \frac{\varphi(z)}{1-2b\varphi(z)+\varphi^2(z)} = \frac{1}{M}\,\frac{z}{1-2bz+z^2}\quad \text{dla } z=-r$$

Dowód. Niech $\varphi \in G^M[b]$, $M=e^T$. W rozważanym przypadku podobnie jak w twierdzeniu 1.2'.

$$\varphi = h(z,T)\ ,$$

gdzie $h=h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania

$$(1.88)\quad \frac{\partial h(z,t)}{\partial t} = -\,h(z,t)P[h(z,t)]\ ,\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,,$$

a $P(z) = 1 - 2bz + \dots$, $b \in [0,1]$, $z \in K_1$.

Z równania (1.88) mamy

$$d\,\log|h(z,t)| = -\,\mathrm{Re}\,P[h(z,t)]\,dt.$$

Ale

$$\frac{1-|h|^2}{1+2b|h|+|h|^2} \leqslant \mathrm{Re}\,P[h(z,t)] \leqslant \frac{1+2b|h|+|h|^2}{1-|h|^2}$$

zatem

$$-\,\frac{1+2b|h|+|h|^2}{1-|h|^2} \leqslant d\,\log|h(z,t)| \leqslant -\,\frac{1-|h|^2}{1+2b|h|+|h|^2}\ .$$

Całkując ostatnią nierówność w przedziale $[0,T]$ i uwzględniając warunek $h(z,0)=z$ i $h(z,T)=\varphi(z)$, otrzymujemy (1.84) i (1.85).

Wniosek. Kładąc $M \longrightarrow \infty$ wtedy $(M\varphi \longrightarrow f \in S_b^*)$ i wykorzystując (1.84) i (1.85), mamy dla $f \in S_b^*$

$$(1.89)\quad \frac{r}{1+2br+r^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^{1+b}(1+r)^{1-b}}, \quad r=|z|<1.$$

Nierówności (1.89) są dokładne i zostały otrzymane w inny sposób w [36].

Kładąc b=1 lub b=0 można otrzymać odpowiednio z (1.84) i (1.85) oszacowania $|\varphi(z)|$ dla funkcji quasi-gwiaździstych i quasi-gwiaździstych z $a_2=0$. Ostatnie oszacowanie jest dokładne dla funkcji quasi-gwiaździstych nieparzystych, jako że funkcja ekstremalna jest nieparzysta.

Rozważmy jeszcze (ze względu na porównania) klasę funkcji $G^M_{1/2}[b]$, tj. klasę funkcji quasi-1/2-gwiaździstych danych równaniem (1.7), gdzie f jest funkcją 1/2-gwiaździstą postaci (1.70). Mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.15. Jeśli $\varphi \in G^M_{1/2}[b]$, $M=e^T$, $b \in [0,1]$, to

$$(1.90)\quad \frac{|\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^{\frac{1+b}{2}}(1+|\varphi(z)|)^{\frac{1-b}{2}}} \leqslant \frac{1}{M}\,\frac{r}{(1-r)^{\frac{1+b}{2}}(1+r)^{\frac{1-b}{2}}}$$

oraz

$$(1.91)\quad \frac{|\varphi(z)|}{\left(1+2b|\varphi(z)|+|\varphi(z)|^2\right)^{1/2}} \geqslant \frac{1}{M}\,\frac{r}{\sqrt{1+2br+r^2}}, \quad |z|=r<1.$$

Nierówności (1.90) i (1.91) są dokładne, przy czym funkcje ekstremalne spełniają odpowiednio równania

$$\frac{\varphi(z)}{(1-\varphi(z))^{\frac{1+b}{2}}(1+\varphi(z))^{\frac{1-b}{2}}} = \frac{1}{M}\,\frac{z}{(1-z)^{\frac{1+b}{2}}(1+z)^{\frac{1-b}{2}}}\,,\quad \text{dla } z=r\,,$$

i

$$\frac{\varphi(z)}{\sqrt{1+2b\varphi(z)+\varphi^2(z)}} = \frac{1}{M}\,\frac{z}{\sqrt{1+2bz+z^2}}\,,\quad \text{dla } z=r\,.$$

Dowód. Niech $\varphi \in G^M_{1/2}[b]$. Wtedy można wykazać, że

$$\varphi(z) = h(z,T)\,,$$

gdzie $h(z,t)$ jest rozwiązaniem równania postaci (1.30), a $P(z)$ jest klasą funkcji holomorficznych postaci (1.71), spełniających warunek

$$|P(z)-1| < 1\,,\qquad z \in K_1\,.$$

Można zauważyć, że $P(z) = 2(1+p(z))^{-1}$, gdzie $p \in P_b$, skąd wynika, że obszarem zmienności $\{P(z)\}$ jest koło

$$|w - A_1| \leq R_1\,,$$

gdzie

$$A_1 = 2(1+\bar{A})\left[|1+A|^2-R^2\right]^{-1}\,,\quad R_1 = 2R\left[|1+A|^2-R^2\right]^{-1}\,,$$

natomiast A i R dane są wzorami (1.76).

Ponieważ $\operatorname{Re}A_0 - R_0 \leq \operatorname{Re}P(z) \leq \operatorname{Re}A_0 + R_0$, z powyższych rozważań wynika, że

$$(1.92)\qquad \frac{1-|z|^2}{1+b|z|} \leqslant \operatorname{Re} P(z) \leqslant \frac{1+2b|z|+|z|^2}{1+b|z|}$$

Nierówność (1.92) i rozumowanie analogiczne jak w dowodzie twierdzenia 1.14 kończy dowód nierówności (1.90) i (1.91)

Kładąc $M \longrightarrow \infty$ oraz wykorzystując (1.90) i (1.91) otrzymujemy następujący wniosek

Wniosek. Każda funkcja 1/2-gwiaździsta z ustalonym drugim współczynnikiem spełnia nierówność

$$(1.93)\qquad \frac{r}{\sqrt{1+2br+r^2}} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^{\frac{1+b}{2}}(1+r)^{\frac{1-b}{2}}} .$$

Wniosek. Promień koła pokrycia dla klasy funkcji 1/2-gwiaździstych postaci (1.82) z ustalonym drugim współczynnikiem równa się

$$\frac{1}{\sqrt{2(1+b)}}$$

Uwaga. Interesującym wydaje się porównanie oszacowań danych wzorem (1.80) i (1.93). Oszacowania te są różne, podczas gdy wiadomo, że w pełnej klasie funkcji wypukłych i 1/2-gwiaździstych są identyczne.

Na zakończenie rozdziału I wspomnijmy, że rozważając klasę funkcji quasi-gwiaździstych $G^{M,n}$, $M=e^T$, $n \geqslant 1$, danych równaniem (1.7), gdzie funkcje gwiaździste generujące są postaci

$$(1.94)\qquad f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots , \qquad z \in K_1 ,$$

można podać odpowiednie równania typu Löwnera dla tej klasy funkcji, jak również szeregu oszacowań pewnych funkcjonałów, które są dokładne dla funkcji n-symetrycznych [37].

Fakt ten wynika z następujących twierdzeń.

Twierdzenie 1.16. [37] Niech $\varphi \in G^{M,n}$. Wtedy

$$\left[\frac{M^n}{2r^n}(1+r^n)\left(1+r^n-\sqrt{(1+r^n)^2-\frac{4r^n}{M^n}}\right)-1\right]^{1/n} \leq |\varphi(z)| \leq \tag{1.95}$$

$$\leq \left[\frac{M^n}{2r^n}(1-r^n)\left(1-r^n-\sqrt{(1-r^n)^2+\frac{4r^n}{M^n}}\right)+1\right]^{1/n}, \quad |z| = r < 1.$$

Funkcje ekstremalne dane są odpowiednio równaniami

$$\frac{\varphi(z)}{(1-\varphi^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M}\frac{z}{(1-z^n)^{2/n}} \quad \text{i} \quad \frac{\varphi(z)}{(1+\varphi^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M}\frac{z}{(1+z^n)^{2/n}}$$

Twierdzenie 1.17. [37] Niech $\varphi \in G^{M,n}$. Wtedy

$$\left|\arg\frac{\varphi(z)}{z}\right| \leq \frac{1}{n}\log\frac{1-|\varphi(z)|^n}{1+|\varphi(z)|^n}\cdot\frac{1+r^n}{1-r^n}, \quad |z| = r < 1. \tag{1.96}$$

Funkcje ekstremalne dane są odpowiednio równaniami

$$\frac{\varphi(z)}{(1+i\varphi^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M}\frac{z}{(1+iz^n)^{2/n}}$$

i

$$\frac{\varphi(z)}{(1-i\varphi^n(z))^{2/n}} = \frac{1}{M}\frac{z}{(1-iz^n)^{2/n}}.$$

Oszacowania (1.95) i (1.96) w szczególnym przypadku $n=1$ dają wyniki uzyskane w [3].

Analogicznie do poprzedniego dla funkcji wypukłych f z klasy $S_n^c \subset S^c$ postaci (1.94) zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.18. Jeżeli $f \in S_n^c$, to

$$\int_0^r \frac{dt}{(1+t^n)^{2/n}} \leqslant |f(z)| \leqslant \int_0^r \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} .$$

Wynik jest dokładny. Funkcje ekstremalne f spełniają równanie

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1+\varepsilon z^n}{1-\varepsilon z^n} , \qquad |\varepsilon| = 1 .$$

Warto zauważyć, że $f \in S_n^c$ jest funkcją ograniczoną, bo dla $n > 2$

$$\int_0^r \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^n)^{2/n}} = \left[2n \cos\frac{\pi}{n} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{-1} \Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

Z twierdzenia 1.18 dla $n=1$ otrzymujemy oszacowanie $|f(z)|$ dla $f \in S^c$.

4. Równanie (1.18) i jego specjalne postacie omówione wyżej są szczególnymi przypadkami ogólniejszego równania Löwnera - Kufariewa - Bazylewicza podanego w [2]. Tam jednak oparto się na teorii Löwnera - Kufariewa równań parametrycznych w odróżnieniu od przedstawionej w tym rozdziale metody

elementarnej. Ponadto Bazylewicz nie zajmował się strukturą klas dla pośrednich wartości parametru t, lecz po scałkowaniu odpowiedniego równania różniczkowego Bernoulliego, po przejściu granicznym $t \longrightarrow \infty$, uzyskał wzór strukturalny na tzw. klasę funkcji Bazylewicza.

Jak już wspomniano, dla pośrednich wartości parametrów badano klasę funkcji quasi-gwiaździstych G^M w [3]. Jednak oszacowania nie wszystkich funkcjonałów dla pośrednich wartości parametru t przechodzą w granicy $t \longrightarrow \infty$ w oszacowania prawdziwe dla S^*, która jest przypadkiem granicznym klasy G^M, lecz w odpowiednie wyniki dla funkcji klasy S. Przykładami takich funkcjonałów są $\left|\arg \frac{\varphi(z)}{z}\right|$ i $\left|\arg \frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|$, $z \in K_1$, $\varphi \in G^M$.

R o z d z i a ł II

Zbiory pokrycia dla funkcji z unormowaniem Montela i majoryzacja funkcji

1. Klasy funkcji holomorficznych w K_1 unormowanych przez warunki

$$(2.1) \qquad F(0) = 0 \ , \qquad F(z_0) = 1$$

bądź

$$(2.1') \qquad F(0) = 0 \ , \qquad F(z_0) = z_0 \ ,$$

gdzie $z_0 \neq 0$ jest ustalonym punktem koła, były przedmiotem badań wielu autorów, między innymi [16], [17], [27], [15].

O funkcjach z unormowaniem (2.1) bądź (2.1′) mówimy, że posiadają unormowanie Montela. Ze względu na to, że klasy z unormowaniem Montela nie są obrotowe, niektóre problemy ekstremalne dla nich są trudniejsze niż w klasach obrotowych. Do takich problemów należą między innymi twierdzenia o pokryciu.

Niech $S^*_\beta(z_0)$ i $S^c(z_0)$ oznaczają odpowiednio klasy funkcji β-gwiaździstych i wypukłych w K_1 unormowanych przez warunki (2.1).

W tym rozdziale wyznaczymy zbiory postaci

(2.2) $$\mathcal{K}\left[S^*_\beta(z_0), r\right] = \bigcap_{F \in S^*_\beta(z_0)} F(K_r),$$

(2.3) $$\mathcal{L}\left[S^*_\beta(z_0), r\right] = \bigcup_{F \in S^*_\beta(z_0)} F(K_r)$$

dla ustalonego $r \in (0,1]$ i $\beta \in \{0, \frac{1}{2}\}$.

W przypadku granicznym dla $r \longrightarrow 1$ i $\beta = 0$ lub $\beta = \frac{1}{2}$, otrzymujemy zbiory postaci (tzw. zbiory Koebego)

(2.4) $$\bigcap_{F} F(K_1)$$

gdzie $F \in S^*(z_0)$ bądź $F \in S^c(z_0)$, które zostały wyznaczone w [16].

Następujące dwa twierdzenia, dotyczące majoryzacji funkcji, ilustrują zastosowania zbiorów postaci (2.2). Jedno z tych twierdzeń jest rozszerzeniem wyniku z [15].

W dalszym ciągu wykorzystywać będziemy fakt [17], że $F(z) \in S^*_\beta(z_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(z) = \frac{f(z)}{f(z_0)}$, gdzie f jest funkcją β-gwiaździstą klasycznie unormowaną.

Niech D_z będzie zbiorem wartości $F(z)$ dla ustalonego $z \in C_r = \{z : |z| = r < 1\}$ i funkcji F zmieniającej się w klasie $S^*_\beta(z_0)$. Oznaczmy następnie

$$D = D\left[S^*_\beta(z_0), r\right] = \bigcup_{z \in C_r} D_z.$$

Wiadomo z [18] i [6], że $D[S^*_\beta(z_0),r]$ jest obszarem domkniętym, którego brzeg składa się z dwóch konturów gwiaździstych względem początku układu: zewnętrznego $\Gamma_1(r)$ i wewnętrznego $\Gamma_2(r)$.

Twierdzenie 2.1. Niech $\mathrm{In}\,\Gamma_i(r)$, $i = 1,2$ oznacza obszar ograniczony krzywą $\Gamma_i(r)$. Wtedy

$$(2.5)\qquad \mathcal{L}\,[S^*_\beta(z_0),r] = \mathrm{In}\,\Gamma_1(r)\,,$$

$$(2.6)\qquad \mathcal{K}\,[S^*_\beta(z_0),r] = \mathrm{In}\,\Gamma_2(r)\,.$$

Dowód. Oznaczmy

$$\Sigma(K_r) = \bigcup_{z\in K_r}\ \bigcup_{F\in S^*_\beta(z_0)} \{F(z)\}\,,$$

$$\Pi(K_r) = \bigcap_{F\in S^*_\beta(z_0)}\ \bigcup_{z\in K_r} \{F(z)\}\,.$$

Zauważmy, że

$$(2.7)\qquad \Sigma(K_r) = \mathrm{In}\,\Gamma_1(r).$$

Z definicji zbioru $D[S^*_\beta(z_0),r]$ wynika, że dla każdej funkcji $F\in S^*_\beta(z_0)$ mamy $F(C_r)\subset D$. Stąd na mocy zasady Lindelöfa $F(K_r)\subset \mathrm{In}\,\Gamma_1(r)$, tj $\Sigma(K_r)\subset \mathrm{In}\,\Gamma_1(r)$. Z drugiej strony, jeżeli $w\in \mathrm{In}\,\Gamma_2(r)$, to $w\in \mathrm{In}\,\Gamma_1(r)$, gdyż $\mathrm{In}\,\Gamma_2(r)\subset \mathrm{In}\,\Gamma_1(r)$.
Jeżeli zaś $w\in D-\Gamma_1(r)$, to istnieje punkt w_0 będący punktem wewnętrznym obszaru D, który leży na przedłużeniu odcinka $[0,w]$. Z określenia zbioru D wynika, że istnieje funkcja

$F_o \in S^*_\beta(z_o)$ i punkt $z_1 \in C_r$ taki, że $F_o(z_1) = W_o$.

Stąd na mocy gwiaździstości F_o punkt $W \in F_o(K_r)$, a więc $W \in \sum(K_r)$, czyli $\mathrm{In}\,\Gamma_1(r) \subset \sum(K_r)$.

Oczywista równość

$$\sum(K_r) = \mathcal{L}\left[S^*_\beta(z_o), r\right]$$

kończy dowód twierdzenia (2.5).

Aby dowieźć (2.6) zauważmy, że dla każdej funkcji jednolistnej $F \in S^*_\beta(z_o)$ mamy

$$F(K_r) = F(K_1) - F(K_1 - K_r),$$

a stąd

$$\prod(K_r) = \prod(K_1) - \sum(K_1 - K_r). \tag{2.8}$$

Biorąc pod uwagę, że zbiór $\sum(K_1 - K_r)$ jest identyczny z zewnętrzem zbioru $[\Gamma_2(r) \cup \mathrm{In}\,\Gamma_2(r)]$ oraz relację (2.8) wnioskujemy, że $\prod(K_r) \subset \mathrm{In}\,\Gamma_2(r)$. Z drugiej strony, jeżeli $W \in \mathrm{In}\,\Gamma_2(r)$, to dla każdej funkcji $F \in S^*_\beta(z_o)$ również $W \in \mathrm{In}\,F(C_r)$, tzn. dla każdej funkcji $F \in S^*_\beta(z_o)$, $W \in F(K_r)$ czyli $W \in \prod(K_r)$. Zatem $\mathrm{In}\,\Gamma_2(r) \subset \prod(K_r)$.

Otrzymane inkluzje i oczywista równość $\prod(K_r) = \mathcal{K}\left[S^*_\beta(z_o), r\right]$ kończą dowód relacji (2.6) i twierdzenia 2.1.

Korzystając z twierdzenia 1.1 wyznaczymy zbiory $\mathcal{K}\left[S^*_\beta(z_o), r\right]$ i $\mathcal{L}\left[S^*_\beta(z_o), r\right]$ dla $\beta = 0$ i $\beta = \frac{1}{2}$. W tym celu wystarczy znaleźć brzegi tych obszarów, tj. krzywe $\Gamma_1(r)$ i $\Gamma_2(r)$.

Zagadnienie to sprowadza się do znalezienia obwiedni brzegów

zbiorów D_z, gdzie $z \in C_r$.

Ze związku między klasami $S^*_\beta(z_0)$ i S^*_β wynika, że problem wyznaczenia obszaru zmienności $\{F(z)\}$ dla ustalonego $z \in K_1$, gdy funkcja F przebiega klasę $S^*_\beta(z_0)$ jest równoważny wyznaczeniu obszaru zmienności stosunku $\left\{\frac{f(z)}{f(z_0)}\right\}$, gdy punkty z i z_0 są ustalone w kole K_1, a funkcja f zmienia się w klasie S^*_β.

Zbiór $\left\{\frac{f(z)}{f(z_0)},\ f \in S^*\right\}$ został wyznaczony w [17], natomiast zbiór $\left\{\frac{f(z)}{f(z_0)},\ f \in S^*_{1/2}\right\}$ w [39].

Zbiory $D\left[S^*(z_0), r\right]$ i $D\left[S^*_{1/2}(z_0), r\right]$ wyznaczono odpowiednio w [18] i [6]. Zatem zgodnie z twierdzeniem 2.1 i uwagami uczynionymi wyżej mamy.

Twierdzenie 2.2. Jeżeli $|z_0| = r_0$, $|z| = r$, to brzegiem obszaru $\mathcal{K}\left[S^*(z_0), r\right]$ i $\mathcal{L}\left[S^*(z_0), r\right]$ są odpowiednio krzywe $\Gamma_2^*(r)$ i $\Gamma_1^*(r)$ o następujących równaniach we współrzędnych biegunowych

$$(2.9)\quad \Gamma_2^*(r):\ \varrho(\theta) = \frac{r}{r_0(1-r^2)^2}\Big[(1+r^2)(1+r_0^2) - 4rr_0\cos\theta - \sqrt{\left[(1+r^2)(1+r_0^2) - 4rr_0\cos\theta\right]^2 - (1-r^2)^2(1-r_0^2)^2}\Big],$$

oraz

$$(2.10)\quad \Gamma_1^*(r):\ \varrho(\theta) = \frac{r}{r_0(1-r^2)^2}\Big[(1+r^2)(1+r_0^2) - 4rr_0\cos\theta + \sqrt{\left[(1+r^2)(1+r_0^2) - 4rr_0\cos\theta\right]^2 - (1-r^2)^2(1-r_0^2)^2}\Big].$$

Twierdzenie 2.3. Jeżeli $|z_o| = r_o$, $|z| = r$, to brzegiem obszaru $\mathcal{K}[S^*_{1/2}(z_o), r]$ i $\mathcal{L}[S^*_{1/2}(z_o), r]$ są odpowiednio krzywe $\Gamma_2^{**}(r)$ i $\Gamma_1^{**}(r)$ o następujących równaniach we współrzędnych biegunowych:

$$(2.11)\quad \Gamma_2^{**}(r):\ \rho(\theta) = \frac{r}{r_o(1-r^2)}\Big[(1-rr_o\cos\theta) - \sqrt{(1-rr_o\cos\theta)^2-(1-r^2)(1-r_o^2)}\Big]$$

$$(2.12)\quad \Gamma_1^{**}(r):\ \rho(\theta) = \frac{r}{r_o(1-r^2)}\Big[(1-rr_o\cos\theta) + \sqrt{(1-rr_o\cos\theta)^2-(1-r^2)(1-r_o^2)}\Big]$$

Można sprawdzić, że funkcje brzegowe odpowiadające obszarowi zmienności $\left\{\frac{f(z)}{f(z_o)},\ f\in S^*_{1/2}\right\}$, a więc również $D[S^*_{1/2}(z_o), r]$, są funkcjami wypukłymi postaci $\frac{z}{z_o}\cdot\frac{1-z_o e^{i\varphi}}{1-z e^{i\varphi}}$, gdzie φ jest liczbą rzeczywistą. Zatem mamy następujący

Wniosek. Równania brzegów obszarów $\mathcal{K}[S^c(z_o), r]$ i $\mathcal{L}[S^c(z_o), r]$ dane są odpowiednio równaniami (2.11) i (2.12).

Wniosek. Kładąc $r \longrightarrow 1$ oraz wykorzystując (2.9) i (2.11) mamy:

1° $\mathcal{K}[S^*(z_o), 1]$ jest wnętrzem elipsy

$$(2.13)\quad \rho(\theta) = \frac{(1-r_o^2)^2}{4r_o}\cdot\frac{1}{1-2r_o\cos\theta+r_o^2};$$

2° $\mathcal{K}[S^c(z_0), 1]$ jest wnętrzem elipsy

$$\varrho(\theta) = \frac{(1-r_0^2)}{2r_0} \cdot \frac{1}{1-r_0\cos\theta} . \tag{2.14}$$

Elipsy (2.13) i (2.14) pokrywają się z elipsami z twierdzeń 4 i 3 dla $a=0$ i $b=1$ z pracy [16].

2. Możliwości użycia zbiorów Koebego do rozwiązania pewnych problemów w teorii majoryzacji funkcji pokazane zostały po raz pierwszy w [15]. Podane niżej twierdzenie 2.4 rozszerza ten wynik, pozwalając podać metodę rozwiązywania tzw. uogólnionego problemu odwrotnego [18].

Niech H oznacza klasę funkcji $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$, $a_1 \geqslant 0$ holomorficznych w K_1, a $H_0 \subset H$ klasę takich funkcji, że ponadto $f(z)/z \neq 0$, $z \in K_1$.

Przez N oznaczać będziemy klasę funkcji $\omega(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots$ $\alpha_0 \geqslant 0$, holomorficznych w K_1 i takich, że $|\omega(z)| \leqslant 1$ i $N_0 \subset N$ klasę takich funkcji $\omega(z)$, że $\omega(z) \neq 0$ dla $z \in K_1$.

Niech następnie Ω_r oznacza domknięty obszar wypukły ograniczony półokręgiem $|z| = r$, $\mathrm{Re}\, z \leqslant 0$ i dwoma łukami kołowymi przechodzącymi przez punkt $z=1$ i stycznymi do okręgu $|z| = r$ w punktach $z = \pm ir$.

Wiadomo [12], że

$$\Omega_r = \left\{\omega(z) :\ \omega \in N,\ z \in \bar{K}_r\right\} . \tag{2.15}$$

Kształt zbioru

$$\overset{\circ}{\Omega}_r = \left\{\omega(z) :\ \omega \in N_0,\ z \in \bar{K}_r\right\} \tag{2.16}$$

i równanie jego brzegu można znaleźć w [13].

Oznaczmy wreszcie dla dowolnej klasy $T \subset S$

(2.17) $$T(z_0) = \left\{ F : F(z) = \frac{f(z)}{f(z_0)} , \ f \in T \right\} ,$$

gdzie $z \in K_1$ i $z_0 \neq 0$ jest dowolnym ustalonym punktem z koła K_1.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenia:

Twierdzenie 2.4. Dla każdego $\varrho \in (0,1]$ istnieje "możliwie największa" liczba $R(\varrho) \leq \varrho$, taka, że

$$\bigwedge_{\substack{f \in H \\ f \not\equiv F}} \bigwedge_{F \in T} \left[|f(z)| \leq |F(z)| , \ z \in K_1 \right] \Longrightarrow$$

(2.18)
$$\bigwedge_{\substack{r \in (0, R(\varrho)) \\ r = |z_0|}} \left[f(\bar{K}_r) \subset F(K_\varrho) \right] \Leftrightarrow \left\{ \left[\Omega_r - \{1\} \right] \subset \mathcal{K}\left[T(z_0) , \varrho \right] = \bigcap_{\Phi \in T(z_0)} \Phi(K_\varrho) \right\} .$$

Twierdzenie 2.5. Dla każdego $\varrho \in (0,1]$ istnieje "możliwie największa" liczba $R(\varrho) \leq \varrho$ taka, że

$$\bigwedge_{f \in H_0} \bigwedge_{F \in T} \left[|f(z)| \leq |F(z)| , \ z \in K_1 \right] \Longrightarrow$$

(2.19)
$$\bigwedge_{\substack{r \in (0, R(\varrho)) \\ r = |z_0|}} \left[f(\bar{K}_r) \subset F(K_\varrho) \right] \Leftrightarrow \left\{ \left[\overset{\circ}{\Omega}_r - \{1\} \right] \subset \mathcal{K}\left[T(z_0) , \varrho \right] = \bigcap_{\Phi \in T(z_0)} \Phi(K_\varrho) \right\} .$$

Podamy dowód pierwszego z tych twierdzeń, gdyż dowód drugiego jest analogiczny.

Dowód twierdzenia 2.4. Załóżmy, że dla dowolnej pary funkcji $f \in H$, $F \in T$ $(f \not\equiv F)$ ma miejsce relacja $|f(z)| \leq |F(z)|$, $z \in K_1$, która implikuje $F(\bar{K}_r) \subset F(K_\varrho)$ dla $r \in (0, R(\varrho))$. Wynika stąd, że dla każdego z_0, $|z_0| = r$ istnieje $z_1 \in K_\varrho$ takie, że $f(z_0) = F(z_1)$.

Założenie $|f(z)| \leq |F(z)|$, $z \in K_1$ oznacza, że istnieje taka funkcja $\omega \in N$ $(\omega \not\equiv 1)$, że $f(z_0) = \omega(z_0) F(z_0)$. Stąd

$$\omega(z_0) = \frac{f(z_0)}{F(z_0)} = \frac{F(z_1)}{F(z_0)} = \Phi(z_1) .$$

Widzimy więc, że z uwagi na niezależność doboru funkcji f i F dla każdej funkcji $\omega \in \Omega$ $(\omega \not\equiv 1)$ istnieje taka funkcja $\Phi \in T(z_0)$ i punkt $z_1 \in K_\varrho$ takie, że $\omega(z_0) = \Phi(z_1)$. Ale każdy punkt obszaru $[\Omega_r - \{1\}]$ jest postaci $\omega(z_0)$ i $\omega(z_0) = \Phi(z_1)$, a więc $\omega(z_0) \in \Phi(K_\varrho)$ dla każdej funkcji $\Phi \in T(z_0)$, czyli

$$\omega(z_0) \in \bigcap_{\Phi \in T(z_0)} \Phi(K_\varrho) = \mathcal{K}\left[T(z_0), \varrho\right] .$$

Wykazaliśmy więc inkluzję $[\Omega_r - \{1\}] \subset \mathcal{K}[T(z_0), \varrho]$.

Na odwrót niech teraz $f \in H$ i $F \in T$ $(f \not\equiv F)$ będą takie, że $\omega(z) = f(z) / F(z)$, $\omega \in \Omega$ $(\omega \not\equiv 1)$ i niech dla każdego $r \in (0, R(\varrho))$ będzie

$$[\Omega_r - \{1\}] \subset \mathcal{K}\left[T(z_0), \varrho\right] .$$

Ponieważ dla każdego $z_o, |z_o| = r, \omega(z_o) \in \mathcal{K}[T(z_o), \varrho]$, zatem dla każdej funkcji $\Phi \in T(z_o)$ istnieje takie $z_1 \in K_\varrho$, że $\omega(z_o) = \Phi(z_1)$.

Ale

$$\Phi(z_1) = \frac{F(z_1)}{F(z_o)} = \omega(z_o) = \frac{f(z_o)}{F(z_o)},$$

więc $F(z_1) = f(z_o)$. Zatem $f(C_r) \subset F(K_\varrho)$, co jest równoważne temu, że $f(\bar{K}_r) \subset F(K_\varrho)$.

Twierdzenie zostało więc udowodnione.

Uwaga. Uogólniony problem odwrotny do problemu Biernackiego można sformułować w następujący sposób [18]: dla danego $r \in (0,1]$ znaleźć taką "możliwie największą" liczbę $R(r)$, że:

$$(2.20) \qquad \left[|f(z)| \leq |F(z)|,\ z \in K_1 \right] \Rightarrow f(K_{R(r)}) \subset F(K_r)$$

dla każdej pary funkcji f, F, gdzie f zmienia się w odpowiedniej (np. H lub H_o) klasie minorant, a F w odpowiedniej (np. S^*_β) klasie majorant.

Zatem twierdzenia 2.4 i 2.5 podają warunki konieczne i dostateczne, aby zachodziła implikacja (2.20) w przypadku minorant z klasy H bądź H_o.

W praktyce problem wyznaczenia stałej $R(r)$ dla $F \in S^*_\beta$ i $f \in H$ bądź H_o sprowadza się do rozwiązania odpowiednich nierówności dla równań brzegów $\mathcal{K}[S^*_\beta(z_o), r]$ i Ω_r lub $\overset{o}{\Omega}_r$.

Odpowiednie szczegóły rachunkowe dotyczące wyznaczania $R(r)$ można znaleźć np. w [18], [6], [7].

R o z d z i a ł III

Zagadnienia ekstremalne dla funkcji typowo-rzeczywistych

1. W niniejszym rozdziale będziemy rozważać własności klas funkcji typowo-rzeczywistych w kole K_1.
Najpierw rozważymy podklasę T_M klasy funkcji typowo-rzeczywistych i ograniczonych przez M, a następnie wyznaczymy obszar jednolistności dla pełnej klasy funkcji typowo-rzeczywistych.

Wyniki dotyczące problemów w klasie T_M zostały opublikowane w [20].

Następujące równoważne definicje funkcji typowo-rzeczywistych są najczęściej używane.

Definicja. Funkcję holomorficzną w obszarze D zawierającym odcinki osi rzeczywistej nazywamy typowo-rzeczywistą, jeżeli przyjmuje wartości rzeczywiste na osi rzeczywistej i tylko na osi rzeczywistej.

Definicja. Funkcję holomorficzną w obszarze D zawierającym odcinki osi rzeczywistej nazywa się typowo-rzeczywistą, jeśli jest rzeczywista na osi rzeczywistej, a w pozostałych punktach obszaru D spełnia nierówność

$$\text{Im}\, z \cdot \text{Im}\, f(z) > 0 \quad , \quad z \in D \, , \quad \text{Im}\, z \neq 0. \tag{3.1}$$

Klasę funkcji typowo-rzeczywistych w kole K_1 oznaczać będziemy przez TR.

Klasa TR została wprowadzona przez Rogosińskiego w [31] i badana następnie przez wielu autorów np. [30], [29], [10].

Dla klasy TR znane jest np. [30] lub [10] przedstawienie parametryczne za pomocą całki Stieltjesa.

Mianowicie:

$$f(z) \in TR \iff f(z) = \int_{-1}^{1} \frac{z}{1-2tz+z^2}\, d\mu(t) \, , \tag{3.2}$$

gdzie μ zmienia się w klasie wszystkich funkcji niemalejących w przedziale $[-1,1]$ i takich, że $\int_{-1}^{1} d\mu(t) = 1$.

Idea badania niżej zdefiniowanej klasy funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych T_M zrodziła się z obserwacji własności jądra, które występuje we wzorze (3.2) dla klasy TR.

Funkcja

$$S(z,t) = \frac{z}{1-2tz+z^2} \quad , \qquad t \in [-1,1] \tag{3.3}$$

jest funkcją jednolistną i gwiaździstą, a ponadto

$$S(z,1) = \frac{z}{(1-z)^2} = k^-(z) \quad ,$$

(3.4)

$$S(z,-1) = \frac{z}{(1+z)^2} = k^+(z) \quad .$$

Funkcja $S(z,t)$ odwzorowuje koło K_1 na płaszczyznę rozciętą od $-\infty$ do $\frac{-1}{2(1+t)}$ i od $\frac{1}{2(1+t)}$ do $+\infty$.

Jak wiadomo funkcje Koebego $k^-(z)$ i $k^+(z)$ są ekstremalnymi ze względu na szereg zagadnień ekstremalnych w klasie S^* bądź S.

Z kolei innym znanym faktem jest, że w pewnych problemach dotyczących funkcji jednolistnych ograniczonych funkcjami ekstremalnymi są tzw. funkcje Picka

$$(3.5)\qquad P^+(z) = \frac{4z}{\left(\sqrt{(1+z)^2 - \frac{4z}{M}} + (1+z)\right)^2},$$

$$P^-(z) = \frac{4z}{\left(\sqrt{(1-z)^2 + \frac{4z}{M}} + (1-z)\right)^2},$$

odwzorowujące koło K_1 odpowiednio na koło o promieniu M rozcięte wzdłuż promienia od $M\left[2M-1-2\sqrt{M(M-1)}\right]$ do M bądź od $-M$ do $-M\left[2M-1-2\sqrt{M(M-1)}\right]$.

Zauważając, że funkcje Picka (3.5) są rozwiązaniami równań $\frac{z}{(1\pm z)^2} = \frac{w}{(1\pm w)^2}$, rozważmy w związku z funkcją $S(z,t)$ daną w (3.3) następujące równanie

$$(3.6)\qquad \frac{z}{1-2tz+z^2} = \frac{w}{1-2t\frac{w}{M}+\frac{w^2}{M^2}}, \quad M \geqslant 1, \quad z \in K_1.$$

Oznaczając przez $S_M(z,t)$ rozwiązanie równania (3.6) dochodzimy do następującej klasy funkcji

Definicja. Będziemy mówić, że funkcja

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \quad , \qquad z \in K_1$$

należy do klasy T_M, $M > 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3.7) \qquad f(z) = \int_{-1}^{1} S_M(z,t)\, d\mu(t) \quad ,$$

$$(3.8) \qquad S_M(z,t) = \frac{2z}{\sqrt{\left[1-2\left(1-\frac{1}{M}\right)tz+z^2\right]^2 - \frac{4z^2}{M^2}} + \left[1-2\left(1-\frac{1}{M}\right)tz+z^2\right]} \; ,$$

gdzie μ zmienia się w klasie wszystkich funkcji niemalejących w przedziale $[-1,1]$ i takich, że $\int_{-1}^{1} d\mu(t) = 1$.

Zauważmy w dalszym ciągu, że jeśli $f \in T_M$, to f jest funkcją typowo-rzeczywistą a ponadto $|f(z)| < M$, $M > 1$, $z \in K_1$. Ponadto $T_\infty = TR$, skąd rezultaty otrzymane dla klasy T_M dawać będą w granicy $M \longrightarrow \infty$ wyniki z klasy TR. Mimo to okaże się, że klasa T_M nie wyczerpuje całej klasy funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych.

Wykażemy najpierw następujący lemat.

Lemat 3.1. Funkcja $W = S_M(z,t)$, $t \in [-1,1]$ dana wzorem (3.8) odwzorowuje koło K_1 na koło o promieniu M rozcięte wzdłuż odcinków $[-M, a(t)]$ i $[b(t), M]$, gdzie

$$(3.9) \qquad a(t) = -\left\{\sqrt{\left[1+t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]^2 - \frac{1}{M^2}} + \left[1+t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]\right\}^{-1}$$

$$(3.10) \qquad b(t) = \left\{\sqrt{\left[1-t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]^2 - \frac{1}{M^2}} + \left[1-t\left(1-\frac{1}{M}\right)\right]\right\}^{-1} ,$$

$t \in [-1,1]$.

Dowód. Położmy $z = e^{i\varphi}$ we wzorze (3.8). Otrzymamy wtedy

$$W(e^{i\varphi},t) = \left\{ \sqrt{\left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right]^2 - \frac{1}{M^2}} + \left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right] \right\}^{-1} .$$

Łatwo jest sprawdzić, że jeżeli $\left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right]^2 - \frac{1}{M^2} > 0$, to

$$\min_{0\leq\varphi\leq\pi} \left| \sqrt{\left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right]^2 - \frac{1}{M^2}} + \left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right] \right| = \frac{1}{M}$$

i jest osiągnięte dla $\varphi = 0$ i $t = 1$ bądź $\varphi = \pi$ i $t = -1$. Z drugiej strony $|W(e^{i\pi},1)| < M$ i stąd $|S_M(z,t)| \leq M$ dla każdego $t \in [-1,1]$.

Jeżeli $\varphi = \varphi_1 = \arccos\left[\frac{1}{M} + t(1-\frac{1}{M})\right]$, to $W(e^{i\varphi},t) = M$ dla każdego $t \in [-1,1]$ i podobnie jeżeli $\varphi = \varphi_2 = \arccos\left[-\frac{1}{M} + t(1-\frac{1}{M})\right]$, to $W(e^{i\varphi},t) = -M$ dla każdego $t \in [-1,1]$.

W przypadku gdy $\left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right]^2 - \frac{1}{M^2} < 0$, to

$$W(e^{i\varphi},t) = \left\{ i\sqrt{\frac{1}{M^2} - \left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right]^2} + \left[\cos\varphi - t(1-\frac{1}{M})\right] \right\}^{-1}$$

i stąd otrzymujemy, że $|W(e^{i\varphi},t)| = M$ dla $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

Wreszcie, gdy $\cos\varphi = 1$, to $W(1,t) = b(t)$, $t \in [-1,1]$, a jeżeli $\cos\varphi = -1$, to $W(-1,t) = a(t)$, $t \in [-1,1]$.

Wniosek. Funkcja $W = S_M(z,t)$ jest funkcją jednolistną i gwiaździstą o współczynnikach rzeczywistych, a więc typowo-rzeczywistą. Ponadto $|S_M(z,t)| \leq M$, $z \in K_1$, $t \in [-1,1]$.

Twierdzenie 3.1. Obszarem zmienności funkcjonału $\{f(z)\}$

dla ustalonego $z \in K_1 (\operatorname{Im} z \neq 0)$ i funkcji f przebiegających klasę T_M jest obszar ograniczony łukiem krzywej $W = S_M(z,t)$, $t \in [-1,1]$ i odcinkiem łączącym końce tej krzywej.

Jeżeli $\operatorname{Im} z = 0$, to obszarem zmienności $\{f(z)\}$, $f \in T_M$ jest odcinek osi rzeczywistej

$$[P^+(z),\ P^-(z)], \tag{3.11}$$

gdzie P^+ i P^- dane są wzorami (3.5).

Dowód. Niech $f \in T_M$. Wtedy $f(z)$ ma przedstawienie dane wzorem (3.7). Na podstawie twierdzenia 2 z [1] obszarem zmienności $\{f(z)\}$ dla ustalonego $z \in K_1$, a $f \in T_M$ jest otoczka wypukła krzywej (3.8) $W = S_M(z,t)$, $t \in [-1,1]$.

Wykażemy, że krzywa $W = S_M(z,t)$, $t \in [-1,1]$ jest wypukła. Oznaczmy

$$\eta = z + \frac{1}{z}, \quad \tau = 1 - \frac{1}{M}.$$

Wtedy

$$W = \frac{1}{2(1-\tau)^2}\left[(\zeta - 2t\tau) - \sqrt{(\zeta - 2t\tau)^2 - 4(1-\tau)^2}\right] \quad t \in [-1,1]. \tag{3.12}$$

Połóżmy $\zeta = x + iy$, $w(t) = u(t) + iv(t) = u + iv$.

Wtedy równanie (3.12) krzywej $W = S_M(z,t)$ przyjmie postać (po wyrugowaniu parametru t)

$$u^2 + v^2 = \frac{v}{(1-\tau)^2 v - y}. \tag{3.13}$$

Równanie (3.13) można zapisać w postaci

(3.14) $\Psi(u,v) = (1-\tau)^2 v u^2 + (1-\tau)^2 v^3 - yu^2 - yv^2 - v = 0$.

Badając wyrażenie charakterystyczne dla wypukłości

(3.15) $k = \Psi_{uu}\Psi_v^2 - 2\Psi_{uv}\Psi_u\Psi_v + \Psi_{vv}\Psi_u^2$

otrzymujemy:

$$k = \frac{2v}{u^2+v^2}\Big\{4(u^2+v^2)y^2 - 4v\left[3(1-\tau)^2(u^2-v^2)-1\right] y -$$

$$- 3(1-\tau)^4u^4 + 6(1-\tau)^4u^2v^2 + 2(1-\tau)^2u^2 + 9(1-\tau)^4v^4 -$$

$$- 6(1-\tau)^2v^2 + 1\Big\} = \frac{2v}{u^2+v^2}\cdot A(y) .$$

Rozpatrując wyrażenie A(y) jako funkcję zmiennej y, można sprawdzić że A(y) jest dodatnie dla każdego u i v . Wynika stąd, że krzywa (3.14) ma stały kierunek wypukłości (zależny od znaku v) . Ze wzoru (3.13) i faktu, że $\zeta = z + 1/z$, $z = x + iy$ wynika, że $v > 0$ gdy $\mathrm{Im}\, z > 0$ i $v < 0$ gdy $\mathrm{Im}\, z < 0$, co dowodzi, że funkcja $f \in T_M$ jest typowo-rzeczywista.

Krzywa $W = S_M(z,t)$ jest zamkniętą krzywą Jordana (dla $\mathrm{Im}\, z > 0$ oraz $\mathrm{Im}\, z < 0$) gdy $t \in (-\infty, +\infty)$. Zauważmy, że funkcje $W_1 = S_M(z,1) = P^-(z)$ i $W_2 = S_M(z,-1) = P^+(z)$ leżą zawsze w jednej półpłaszczyźnie (tzn. górnej lub dolnej) i są to końce interesującego nas łuku.
Zatem obszar zmienności jest obszarem podanym w twierdzeniu.
Przypadek $\mathrm{Im}\, z = 0$ jest oczywisty.

Uwaga. Z powyższych rozważań wynika, że krzywa $W = S_M(z,t)$ jest zamknięta i wypukła i ma kształt owalu symetrycznego

względem osi urojonej.

Przechodzi ona przez punkt $W = 0$ i $W = \frac{y+\sqrt{y^2+4(1-\tau)^2}}{2(1-\tau)^2}$ na osi urojonej. Oczywiście rozważany obszar zmienności nie zawiera początku układu.

Wspomniane wyżej informacje na temat kształtu obszaru zmienności $\{f(z)\}$, $z \in K_1$, $f \in T_M$ pozwalają wyznaczyć szereg oszacowań dla funkcji klasy T_M.

Mamy zatem

Twierdzenie 3.2. Jeżeli $f \in T_M$, to dla każdego $z \in K_1 (\operatorname{Im} z \neq 0)$ zachodzą nierówności

$$(3.16) \qquad |S_M(z,1)| \leq |f(z)| \leq |S_M(z,-1)| ,$$

dla $\operatorname{Re} S_M(z,-1) \leq 0$,

$$(3.17) \qquad |S_M(z,-1)| \leq |f(z)| \leq |S_M(z,1)| ,$$

dla $\operatorname{Re} S_M(z,1) \geq 0$.

Jeżeli $\operatorname{Re} S_M(z,-1) \geq 0$ i $\operatorname{Re} S_M(z,1) \leq 0$, to

$$|f(z)| \leq \frac{2}{\left|\sqrt{\left[\operatorname{Im}(z+\frac{1}{z})\right]^2 + 4(1-\tau)^2} - \operatorname{Im}(z+\frac{1}{z})\right|} ,$$

$$(3.18) \quad |f(z)| \geq \begin{cases} d & \text{jeśli } |S_M(z,-1)|^2 - \operatorname{Re} S_M(z,1)\overline{S_M(z,-1)} \geq 0 \\ & \text{i } \operatorname{Im} S_M(z,1) \geq \operatorname{Im} S_M(z,-1) \ ; \\ |S_M(z,-1)| & \text{jeśli } |S_M(z,-1)|^2 - \operatorname{Re} S_M(z,1)\overline{S_M(z,-1)} \leq 0 \\ & \text{i } \operatorname{Im} S_M(z,1) \geq \operatorname{Im} S_M(z,-1) \ ; \end{cases}$$

$$|f(z)| \geq \begin{cases} d & \text{jeśli } |S_M(z,1)|^2 - \operatorname{Re} S_M(z,-1)\overline{S_M(z,1)} \geq 0 \\ & \text{i } \operatorname{Im} S_M(z,1) \leq \operatorname{Im} S_M(z,-1) \ ; \\ |S_M(z,1)| & \text{jeśli } |S_M(z,1)|^2 - \operatorname{Re} S_M(z,-1)\overline{S_M(z,1)} \leq 0 \\ & \text{i } \operatorname{Im} S_M(z,1) \leq \operatorname{Im} S_M(z,-1) \ , \end{cases}$$

gdzie

$$(3.19) \quad d = \left| \operatorname{Im} \frac{S_M(z,-1)}{S_M(z,1) - S_M(z,-1)} \right| \cdot |S_M(z,1) - S_M(z,-1)| \ .$$

Dowód. Oszacowania (3.16) - (3.18) wynikają z własności obszaru zmienności $\{f(z)\}$, $f \in T_M$. Różne przypadki wymagające rozpatrzenia są konsekwencją wzajemnego położenia punktów $W_1 = S_M(z,1)$ i $W_2 = S_M(z,-1)$. Liczba d oznacza odległość początku układu od odcinka łączącego punkty W_1 i W_2 , natomiast warunek $|S_M(z,-1)|^2 - \operatorname{Re} \overline{S_M(z,-1)}\, S_M(z,1) > 0$ implikuje, że kąt między wektorami $[0, S_M(z,-1)]$ i $[S_M(z,-1), S_M(z,1)]$ jest większy od $\pi/2$, co pozwala porównać wielkości d i $|S_M(z,-1)|$.

Oszacowania (3.16) - (3.18) są dokładne. Funkcjami ekstremalnymi w (3.16) i (3.17) są funkcje $f(z) = S_M(z,\pm 1)$.

Funkcją ekstremalną w (3.18) w oszacowaniu od góry jest funkcja $f(z) = S_M(z,t_o)$, gdzie $t_o = \frac{1}{2\tau} \operatorname{Re}(z + 1/z)$, $\tau = 1 - 1/M$.

Funkcjami ekstremalnymi w (3.18) w oszacowaniu od dołu są funkcje $f(z) = S_M(z,\pm 1)$ bądź funkcja

$$f(z) = \lambda S_M(z,1) + (1-\lambda) S_M(z,-1) \ ,$$

gdzie $\lambda \in (0,1)$ spełnia równanie

$$d = \left|\lambda S_M(z,1) + (1-\lambda)\ S_M(z,-1)\right| ,$$

a d jest dane wzorem (3.19).

Twierdzenie 3.3. Jeżeli $f \in T_M$, to dla ustalonego $z \in K_1$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$) mamy

$$(3.20)\quad \arg S_M(z,-1) \leq \arg f(z) \leq \arg S_M(z,1) \quad \text{jeśli } \operatorname{Im} z > 0,$$

$$(3.21)\quad \arg S_M(z,1) \leq \arg f(z) \leq \arg S_M(z,-1) \quad \text{jeśli } \operatorname{Im} z < 0.$$

Funkcjami ekstremalnymi w (3.20) i (3.21) są funkcje $f(z) = S_M(z,\pm 1)$.

Twierdzenie 3.4. Jeżeli $f \in T_M$, to dla każdego ustalonego $z \in K_1$, ($\operatorname{Im} z \neq 0$) mamy

$$(3.22)\quad |\operatorname{Im} S_M(z,-1)| \leq |\operatorname{Im} f(z)| \leq |\operatorname{Im} S_M(z,1)| \quad \text{jeśli } \operatorname{Re} S_M(z,1) \geq 0,$$

$$(3.23)\quad |\operatorname{Im} S_M(z,1)| \leq |\operatorname{Im} f(z)| \leq |\operatorname{Im} S_M(z,-1)| \quad \text{jeśli } \operatorname{Re} S_M(z,-1) \leq 0,$$

$$(3.24)\quad |\operatorname{Im} f(z)| \leq \frac{2}{\left|\sqrt{\left[\operatorname{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^2 + 4(1-\tau)^2} - \operatorname{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right|} ,$$

jeśli $\operatorname{Re} S_M(z,-1) \geq 0$ i $\operatorname{Re} S_M(z,1) \leq 0$,

$$(3.25)\quad |\operatorname{Im} f(z)| \geq \begin{cases} |\operatorname{Im} S_M(z,1)| & \text{jeśli } \operatorname{Re} S_M(z,-1) \geq 0 \text{ i } \operatorname{Re} S_M(z,1) \leq 0 \\ & \text{i } |S_M(z,-1)| \geq |S_M(z,1)| ; \\ |\operatorname{Im} S_M(z,-1)| & \text{jeśli } \operatorname{Re} S_M(z,-1) \geq 0 \text{ i } \operatorname{Re} S_M(z,1) \leq 0 \\ & \text{i } |S_M(z,-1)| \leq |S_M(z,1)|. \end{cases}$$

Gdy $M \longrightarrow \infty$ wyniki zawarte w twierdzeniach 3.1 - 3.4 przechodzą w odpowiednie wyniki dla klasy TR [1], [10], [29].

Wzór (3.7) i twierdzenie 1 z [8] implikują

Twierdzenie 3.5. Klasa T_M jest klasą zwartą i jest domkniętą otoczką wypukłą zbioru funkcji $f(z)= S_M(z,t)$, $t \in [-1,1]$.

Przyporządkowanie $\mu \longleftrightarrow f$ (we wzorze 3.7) jest wzajemnie jednoznaczne i jedynymi punktami ekstremalnymi klasy T_M są funkcje $f(z)= S_M(z,t)$, $t \in [-1,1]$.

Niech $\mathcal{J}$ będzie funkcjonałem liniowym i ciągłym na przestrzeni Frecheta wszystkich funkcji holomorficznych w kole K_1. Podobnie jak w [8] mamy

(3.26) $\max\left\{\mathrm{Re}\,\mathcal{J}(f) : f \in T_M\right\} = \max\left\{\mathrm{Re}\,\mathcal{J}(f) : f \text{ jest elementem otoczki wypukłej klasy } T_M\right\} = \max\left\{\mathrm{Re}\,\mathcal{J}(f) : f \text{ jest punktem ekstremalnym klasy } T_M\right\}$.

Wykorzystując (3.26) i twierdzenie 3.5 mamy

Twierdzenie 3.6. Jeżeli $f \in T_M$, to

$$(3.27) \qquad \min_{t\in[-1,1]} A_n(t) \leqslant a_n \leqslant \max_{t\in[-1,1]} A_n(t), \quad n = 2,3,\ldots,$$

gdzie

$$(3.28) \qquad S_M(z,t) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(t) z^n .$$

W szczególności zachodzi

Lemat 3.2. Jeżeli $f \in T_M$, to

(3.29) $$|a_2| \leq 2\left(1-\frac{1}{M}\right)$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} 1-\frac{1}{M^2} & \text{dla } M \in [1,3] \\ 5\left(1-\frac{1}{M}\right)^2 - 2\left(1-\frac{1}{M}\right) & \text{dla } M \in [3,\infty) \end{cases}$$

Znak równości w (3.27) i (3.29) zachodzi dla funkcji $f(z) = S_M(z,t)$ z odpowiednio dobranym $t \in [-1,1]$. Kładąc wreszcie $M \longrightarrow \infty$ otrzymujemy znany wynik z [10].

Uwaga. Rozważona wyżej klasa funkcji typowo-rzeczywistych T_M nie wyczerpuje całej klasy funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych.

Wynika to np. z faktu, że funkcję ekstremalną dla $\max|a_3|$, $f \in T_M$ jest $f(z) = S_M(z,t)$ i odwzorowuje ona koło K_1 na koło o promieniu M z odpowiednimi nacięciami jak w lemacie 3.1.

Z drugiej strony zachodzi następujące

Twierdzenie Tammiego [35]. Niech $f \in S$ i $|f(z)| < e^T$ dla $z \in K_1$. Wówczas zachodzą dokładne oszacowania

(i) $|a_3| \leq 1-e^{-2T}$ jeśli $0 \leq T \leq 1$,

(ii) $|a_3| \leq 1+e^{-2T}-4e^{-T-\sigma}+2e^{-2\sigma}$ jeśli $1 \leq T < \infty$,

gdzie $0 \leq \sigma \leq 1$ i $\sigma e^{-\sigma} = e^{-T}$.

Mają tu miejsce 3 przypadki

a) $0 \leq T < 1$, wówczas obraz koła K_1 przy odwzorowaniu ekstremalnym przechodzi w koło o promieniu e^T, mające środek w zerze, nacięte dwoma radialnymi odcinkami. Odległość końców tych nacięć od punktu $W = 0$ wynosi $\left(1 + \sqrt{1 - e^{-2T}}\right)^{-1}$. Nacięcia leżą na osi urojonej.

b) $T = 1$, wówczas odpowiednim obrazem jest koło o promieniu e nacięte dwoma krzywoliniowymi łukami Jordana o wspólnym początku na brzegu, symetrycznymi względem osi rzeczywistej, względnie koło nacięte jak poprzednio.

c) $1 < T < \infty$, wówczas odpowiednim obrazem jest obszar symetryczny w/m osi rzeczywistej otrzymany z koła o promieniu e^T przez nacięcie w kształcie "widełek" ( )———) wychodzących z punktu $W = e^T$.

Należy podkreślić, że znaki równości w twierdzeniu Tammiego mają miejsce dla funkcji ograniczonych przez e^T i typowo-rzeczywistych. Z równości $e^T = M$ wynika, że przypadek a) zachodzi dla $1 \leq M \leq e$ i oszacowanie $|a_3|$ w klasie T_M jest identyczne jak w [35].

Oszacowanie (3.29) $|a_3| \leq 1 - \frac{1}{M^2}$, jest słuszne dla $M \in [1,3]$, lecz dla $M \in [e,3]$ obowiązuje oszacowanie (ii) z twierdzenia Tammiego.

Wykażemy teraz, że dla $e^T = 3$ zachodzi nierówność

$$A = 1 + e^{-2T} - 4e^{-T-\sigma} + 2e^{-2\sigma} > 1 - e^{-2T} = B,$$

gdzie $\sigma e^{-\sigma} = e^{-T}$.

Stąd mamy

$$10 - 12 e^{-\sigma} + 18 e^{-2\sigma} > 8 ,$$

gdzie σ $e^{-\sigma} = \frac{1}{3}$. Kładąc w powyższym $e^{-\sigma} = x$ otrzymujemy

$$18x^2 - 12x + 2 = 2(3x - 1)^2 > 0 ,$$

bo $x = e^{-\sigma} \neq \frac{1}{3}$ wobec równości σ $e^{-\sigma} = \frac{1}{3}$. W takim razie $A > B$, co implikuje, że oszacowanie Tammiego jest "gorsze" dla $|a_3|$ niż analogiczne oszacowanie dla klasy T_M. Wobec tego T_M jest istotną podklasą klasy funkcji typowo-rzeczywistych, ograniczonych przez M i klasycznie unormowanych.

2. Klasa funkcji typowo-rzeczywistych TR dana wzorem (3.2) zawiera również funkcje niejednolistne.

Problem wyznaczenia promienia jednolistności i gwiaździstości został rozwiązany w [14]. Promień ten jest równy $\sqrt{2} - 1$.

Ogólniejszym problemem jest wyznaczenie zbioru jednolistności dla klasy TR, tj. takiego maksymalnego podzbioru $\mathcal{U} \subset K_1$, że dla każdego $z \in \mathcal{U}$ wszystkie funkcje $f \in TR$ są jednolistne.

Zbiór ten wyznaczony został ostatnio przez Goodmana [12].

Niżej podamy inną metodę wyznaczania zbioru $\mathcal{U}$, która równocześnie pozwala podać inny, szczegółowy dowód wyniku Goodmana, co jednocześnie zapełnia lukę dowodową występującą w jego pracy a zasygnalizowaną przez recenzenta w Mathematical Reviews, Vol.47, # 2043.

Niech $f \in TR$. Rozważmy funkcjonał

$$\Psi(f) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} , \tag{3.30}$$

gdzie $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $z_1 \neq z_2$, $z_1, z_2 \in K_1$,
$0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$.

Biorąc pod uwagę (3.2) mamy

$$(3.31)\quad \Psi(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1-z_1z_2}{(1-2tz_1+z_1^2)(1-2tz_2+z_2^2)}\, d\mu(t).$$

Z [1] wiadomo, że zbiorem wartości funkcjonału (3.31) jest otoczka wypukła krzywej

$$(3.32)\quad W = W(t) = (1-z_1z_2)(1-2tz_1+z_1^2)^{-1}(1-2tz_2+z_2^2)^{-1},$$

$$t \in [-1,1].$$

Lemat 3.3. Krzywa $W = W(t)$ dana równaniem (3.32) jest krzywą gwiaździstą.

Dowód. Wystarczy wykazać, że krzywa

$$(3.33)\quad \eta(t) = (1-2tz_1+z_1^2)(1-2tz_2+z_2^2) = \eta_1(t)\cdot\eta_2(t),$$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, $z_1 \neq z_2$, $0 < \theta_1$, $\theta_2 < \pi$, $t \in [-1,1]$ jest krzywą gwiaździstą. W tym celu obliczmy $\frac{d}{dt}\arg\eta(t)$.

Mamy

$$(3.34)\quad \frac{d}{dt}\arg\eta(t) = \frac{\bar{\eta}\eta' - \eta\bar{\eta}'}{2i|\eta|^2},$$

skąd

$$\frac{d}{dt}\arg\eta(t) = \frac{d}{dt}\arg\eta_1(t) + \frac{d}{dt}\arg\eta_2(t) =$$

$$= \frac{\bar{\eta}_1\eta_1' - \eta_1\bar{\eta}_1'}{2i|\eta_1|^2} + \frac{\bar{\eta}_2\eta_2' - \eta_2\bar{\eta}_2'}{2i|\eta_2|^2} =$$

$$= \frac{2}{|\eta_1|^2}(r_1^3 - r_1)\cdot \sin\theta_1 + \frac{2}{|\eta_2|^2}(r_2^3 - r_2)\sin\theta_2 < 0 ,$$

co oznacza, że $\arg\eta(t)$ jest funkcją malejącą, czyli $\eta(t)$ jest krzywą gwiaździstą. Lemat został więc udowodniony.

Niech $\mathcal{U}$ będzie częścią wspólną kół:

$$(3.35) \qquad x^2 + (y+1)^2 \leq 2 \quad i \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 2.$$

Okrąg $x^2 + (y+1)^2 = 2$ przechodzi przez punkty -1, 1, $(\sqrt{2}-1)i$, a okrąg $x^2 + (y-1)^2 = 2$ przechodzi przez punkty -1, 1, $(-\sqrt{2}+1)i$.

Wykażemy następujące

Twierdzenie 3.7. Zbiór $\mathcal{U}$ dany przez (3.35) jest zbiorem jednolistności dla klasy TR.

Dowód. Zauważmy, że warunek $\arg W(1) - \arg W(-1) < \pi$ implikuje jednolistność funkcji $f \in TR$, gdzie $W = W(t)$ dana jest wzorem (3.32). Natomiast, jeśli tylko $\arg W(1) - \arg W(-1) = \pi$, to $f \in TR$ nie jest już jednolistna, gdyż funkcjonał $\Psi(f)$ dany wzorem (3.31) przyjmuje wartość zero.

Mamy zatem w tym przypadku

$$\arg \frac{(1+z_1)^2 (1+z_2)^2}{(1-z_1)^2 (1-z_2)^2} = \pi ,$$

co jest równoważne równości

$$= \frac{\eta_2\bar{\eta}_2' - \bar{\eta}_2\eta_2'}{2i|\eta_2|^2} + \frac{\eta_1\bar{\eta}_1' - \bar{\eta}_1\eta_1'}{2i|\eta_1|^2} =$$

$$= \frac{2}{|\eta_1|^2}(r_1^3 - r_1)\sin\theta_1 + \frac{2}{|\eta_2|^2}(r_2^3 - r_2)\sin\theta_2 < 0 ,$$

co oznacza, że $\arg\eta(t)$ jest funkcją malejącą, czyli $\eta(t)$ jest krzywą gwiaździstą. Lemat został więc udowodniony.

Niech $\mathcal{U}$ będzie częścią wspólną kół:

$$x^2 + (y+1)^2 \leq 2 \quad i \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 2. \tag{3.35}$$

Okrąg $x^2 + (y+1)^2 = 2$ przechodzi przez punkty $-1, 1, (\sqrt{2} - 1)i$, a okrąg $x^2 + (y-1)^2 = 2$ przechodzi przez punkty $-1, 1, (-\sqrt{2} + 1)i$.

Wykażemy następujące

Twierdzenie 3.7. Zbiór $\mathcal{U}$ dany przez (3.35) jest zbiorem jednolistności dla klasy TR.

Dowód. Zauważmy, że warunek $\arg W(1) - \arg W(-1) < \pi$ implikuje jednolistność funkcji $f \in TR$, gdzie $W = W(t)$ dane jest wzorem (3.32). Natomiast, jeśli tylko $\arg W(1) - \arg W(-1) = \pi$, to $f \in TR$ nie jest już jednolistna, gdyż funkcjonał $\Psi(f)$ dany wzorem (3.31) przyjmuje wartość zero.

Mamy zatem w tym przypadku

$$\arg \frac{(1+z_1)^2 (1+z_2)^2}{(1-z_1)^2 (1-z_2)^2} = \pi$$

co jest równoważne równości

$$\frac{(1+z_1)(1+z_2)}{(1-z_1)(1-z_2)} = i\beta \; , \quad \beta > 0 .$$

Z powyższej równości otrzymujemy

$$(3.36) \qquad z_2 = \frac{i\beta - 1 - z_1(i\beta+1)}{i\beta + 1 - z_2(i\beta - 1)} = \frac{1 - e^{i\theta} z_1}{e^{i\theta} - z_1} = \gamma(\theta) \, ,$$

gdzie

$$e^{i\theta} = \frac{i\beta + 1}{i\beta - 1} \; , \quad 0 < \theta < \pi \; .$$

Zauważmy, że krzywa $\gamma(\theta)$ przechodzi przez punkt z_1, gdy

$$(3.37) \qquad \left|1 + z_1^2\right| = 2\left|z_1\right| .$$

Ale z_1 jest dowolnym punktem, więc kładąc w (3.37) $z_1 = z = x + iy$, otrzymujemy równanie okręgu

$$\gamma : x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \, ,$$

którego łuk dla $-1 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$, jest "górną" częścią brzegu zbioru $\mathcal{U}$. "Dolną" część brzegu zbioru $\mathcal{U}$ znajdujemy przez symetrię względem osi rzeczywistej.

Wykażemy teraz, że zbiór $\mathcal{U}$ jest maksymalnym zbiorem jednolistności dla klasy TR, tzn. że dla każdego $z \in \mathcal{U}$, $f(z) \in TR$ jest funkcją jednolistną.

Niech z_1 będzie ustalonym punktem wewnętrznym zbioru $\mathcal{U}$, a $\gamma_1(S_1, R_1)$ okręgiem przechodzącym przez punkty $-1, 1, z_1$. Znajdujemy, że

$$S_1 = \frac{-i(1-r_1^2)}{2r_1 \sin\theta_1}, \quad R_1 = \left[1 + \frac{(1-r_1^2)^2}{4r_1 \sin^2\theta_1}\right]^{1/2}, \quad z_1 = r_1 e^{i\theta_1}.$$

Z drugiej strony równość (3.36) implikuje, że

$$(3.38) \qquad \left|\frac{z_2 + \frac{1}{z_1}}{z_2 + z_1}\right| = |z_1|^{-1}.$$

Równanie (3.38) jest równaniem okręgu

$$\gamma_2(S_2, R_2) : S_2 = \frac{-i\, 2r_1 \sin\theta_1}{1-r_1^2}, \quad R_2 = \left[1 + \frac{4r_1^2 \sin^2\theta_1}{(1-r_1^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Widzimy więc, że gdy z_1 leży na łuku okręgu $\gamma_1(S_1, R_1)$ to przy warunku (3.36) punkt z_2 leży na okręgu $\gamma_2(S_2, R_2)$. Ale $S_1 = 1/S_2$, zatem z_1 i z_2 nie mogą leżeć po tej samej stronie łuku γ. Ponieważ zaś funkcjonał $\Psi(f)$ może być zerem tylko na łuku γ, to funkcja $f \in TR$ jest jednolistna wewnątrz $\mathcal{U}$.

B i b l i o g r a f i a

[1] И.Я.Ашкевич, Г.В.Улина, Об областях значений аналитических функций представимых интегралом Стильтеса, Вест.Лен.Унив., 11(1955), 31-42.

[2] I.E.Bazilerich, Ob adnom sluchae integriruemosti v kvadratnykh uravneniyakh Lovnera - Kufareva, Mat.Sborn., 37(1955), 471-476.

[3] I.E.Bazilevich, I.Dzuibiński: Löwners general equations for quasi-α-starlike functions, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Math.Astronom.Phys. 21(1973), 823-831.

[4] A.Bielecki, Z.Lewandowski, Sur certaines familles de fonctions α - étoilées, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska, Sect.A, 15(1961), 45-55.

[5] ———— , ————, Sur un théorème concernant les fonctions univalentes lincairement accessibles de M.Biernacki, Ann.Polon.Math., 12(1962), 61-63.

[6] F.Bogowski, Z.Stankiewicz, Sur la majoration modulaire des fonctions et l'inclusion des domaines dans la classe $S^*_{1/2}$, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska, Sect.A, 25(1971), 5-14.

[7] ———— , ———— , Généralisation dun probleme relatif á la subordination en module et à la subordination en domaine dans le cas des minorantes de la classe H_0, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska, Sect.A 25(1971), 15-25.

[8] L.Brickman, T.H.Mac Gregor, D.R.Wilken , Convex hulls of some classical families of univalent functions, Trans. Amer.Math.Soc., 156(1971), 91-107.

[9] I.Dzuibiński : Quasi - starlike functions, Ann.Polon. Math. 26(1972) 175-187.

[10] Г.М.Голузин, О типично - вещественных функциях, Мат. Сб. 27(69), (1950), 201-218.

[11] ——— , ———— , Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. Наука, Москва 1966.

[12] A.W.Goodman. Critical points of a typically - real function, Proc.Amer.Math.Soc. 38,1, 1973 (95-101) .

[13] F.F. Jabłoński, Sur la subordination en module et en domaine des fonctions holomorphes, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Math.Astronom.Phys., 19(1971), 569-576.

[14] W.E.Kirwan, Extremal problems for the typically real functions, Amer.J.Math., 88(1966), 942-954.

[15] J.G.Krzyż, The Green functions of domain containing fixed ellipse, Mich.Math.J., 20(1973), 13-19.

[16] J.Krzyż, E.Złotkiewicz, Koebe sets for univalent functions with two preassigned values, Ann.Acad.Sci.Fenn. Ser.A.I, 487(1971), 12.

[17] Z.Lewandowski, Sur certaines classes de fonctions univalentes introduites par P.Montel et W.Rogosiński, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Math.Astronom.Phys., 7(1959), 261-265.

[8] L.Brickman, T.H.Mac Gregor, D.R.Wilken, Convex hulls of some classical families of univalent functions, Trans. Amer.Math.Soc., 156(1971), 91-107.

[9] I.Dziubiński : Quasi - starlike functions, Ann.Polon. Math. 26(1972) 175-187.

[10] Г.М.Голузин, О мажорантах - подчиненных функций, Мат. Сб. 27(69), (1950), 201-218.

[11] ——— , ——— , Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. Наука, Москва 1966.

[12] A.W.Goodman, Critical points of a typically - real function, Proc.Amer.Math.Soc. 38.1. 1973 (95-102).

[13] R.F. Jabłoński, Sur la subordination en module et en domaine des fonctions holomorphes, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Math.Astronom.Phys., 19(1971), 569-575.

[14] W.E.Kirwan, Extremal problems for the typically real functions, Amer.J.Math., 88(1966), 942-954.

[15] J.G.Krzyż, The Green functions of domain containing fixed ellipse, Mich.Math.J., 20(1973), 15-19.

[16] J.Krzyż, E.Złotkiewicz, Koebe sets for univalent functions with two preassigned values, Ann.Acad.Sci.Fenn. Ser.A.I. 487(1971), 12.

[17] Z.Lewandowski, Sur certaines classes de fonctions univalentes introduites par P.Montel et M.Biernacki, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Math.Astronom.Phys., 7(1959), 281-288.

[18] Z.Lewandowski, J.Stankiewicz, Les majorantes modulaires étoilées et l'inclusion, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér Sci. Math.Astronom.Phys., 19(1971), 923-929.

[19] Z.Lewandowski, S.Wajler, Sur les fonctions typiquement réelles bornées, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska, Sect.A, 28, (1974), 59-64.

[20] Z.Lewandowski, S.Wajler, L'équation de Löwner généralisée pour certaines sous - classes de fonctions univalentes, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Math.Astronom.Phys., 4(1976), 223-230.

[21] Z.Lewandowski, J.Szynal, S.Wajler, On the covering sets and the majorization of functions, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Math.Astronom.Phys., 22(1974), 29-34.

[22] Z.Lewandowski, E.Złotkiewicz, S.S.Miller, On some classes of starlike functions, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska, Sect.A, 28,(1974), 53-58.

[23] K.Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math.Ann., 89(1923), 103-121.

[24] A.Marx Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Ann. 107(1933) 40-67.

[25] P.T.Mocanu, Une propriété de convexité généralisé dans la théoric de la représentation conforme, Mathematica (Cluj), 11(1969), 127-133.

[26] A.Molęda : On some extremal problems in the class Pm and S_m^* of holomorphic functions in the circle $|z|<1$, Zeszyty Nauk.Uniw.Łódz., Matematyka 52(1973), 57-83.

[27] B.Piłat, On typically real functions with Montel`s normalization, Ann.Univ.M.Curie-Skłodowska, 18(1964), 53-72.

[28] Ch.Pommerenke, Über die Subordination analytischer Funktionen, J. Reine Angew. Math., 218(1965), 159-173.

[29] М.П.Ремизова, Экстремальные задачи в классе типично-вещественных функций. Изв. Высш. Учеб. Зав., Математика, 32(1963), 135-144.

[30] M.S.Robertson, On the coefficients of typically real function, Bull.Amer.Math.Soc., 41(1935), 565-572.

[31] W.Rogosiński, Über positive harmonische Entwicklungen und typisch - reelle Potenzreihen, Math.Zeitschr., 35 (1932), 93-121.

[32] K.Sakaguchi, On extremal problems in the classes of functions with positive real part and typically real ones II, Bull, Nara U.Educ., 18,2,(1969), 1-6.

[33] J.Stankiewicz : Some remarks concerning starlike functions, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Math.Astronom.Phys. 18(1970) 143-146.

[34] J.Szynal, S.Wajler, Sur les fonctions H-quasi-étoilées, Demonstratio Mathematica, 8,2, 1975, (205-214).

[35] O.Tammi, On the maximalization of the coefficient a_3 bounded schlicht functions, Ann.Acad.Sci.Fenn. Ser A.I. Math -Phys. No 162(1953), 12.

[36] D.E.Tepper, On the radius of convexity and boundary distortion of schlicht functions, Trans.Amer.Math.Soc., 150,2(1970), 519-528.

[37] S.Wajler, Sur certaines sous - classes de la classe des fonctions quasi-étoileès, Demonstratio Mathematica, 8,1, 1975,(89-97).

[38] A.Wesołowski : Sur les sous - classes de la classe des fonctions étoileès, Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Astronom. Phys. 19(1971) 577-585.

[39] E.Złotkiewicz, Subordination and convex majorants, Folia Societatis Scientarium Lublinensis, 2(1962), 97-99.

[40] Ł.Żywień : Quasi- α -starlike functions, Zeszyty Nauk. Politechniki Łódz. Ser.Mat. 4(1973) 105-139.